TAJANI - VALLEJO



Cálculo Infinitesimal Geometría Analítica

CESARINI Hnos. - Editores

H. Pagcio



CALCULO INFINITESIMAL
Y
GEOMETRIA ANALITICA

DE LOS MISMOS AUTORES

Aritmética y Algebra. *Curso Moderno,* para Escuelas Industriales. Primer año. Vigésimasexta edición.

Geometría. *Curso Moderno,* para Escuelas Industriales. Primer año. Vigésimasexta edición.

Matemática. *Curso Moderno,* para Escuelas Industriales. Segundo año. Vigésimacuarta edición.

Algebra. Para Escuelas Industriales. Tercer año. Décimanovena año. Décimanovena edición.

Geometría y Trigonometría. Para Escuelas Industriales. Tercer año. Decimaséptima edición.

Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Décima edición.

Regla de Cálculo. Instrucciones para su uso. Sexta edición.

Matemática. *Curso Moderno,* para Nacional y Comercial. Primer año. Tercera edición.

Matemática. *Curso Moderno,* para Nacional y Comercial. Segundo año. Cuarta edición.

Matemática. *Curso Moderno,* para Nacional y Comercial. Tercer año. Segunda edición.

Matemática y Elementos de Matemática Moderna, para Nacional y Comercial. Cuarto año.

Geometría del Espacio, para Nacional y Comercial. Segunda edición.

Trigonometría Rectilínea y Esférica, para Nacional y Liceo. Quinto año. Segunda edición.

Teoría Elemental de los Conjuntos.

Introducción a la Lógica Matemática, de Tajani-Vallejo-Incarnato.

Matemática Financiera, de Miguel Tajani. Décimatercera edición.

Temas de Análisis Matemático, de Miguel Tajani. (Agotado.)

Seguros de Vida, de Miguel Tajani. (Agotado.)

MIGUEL M. TAJANI - MANUEL J. VALLEJO

CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA

DECIMA EDICION

CESARINI HNOS. - EDITORES
SARMIENTO 3219/31 - BUENOS AIRES

PRINTED IN ARGENTINA
IMPRESO EN ARGENTINA

PRÓLOGO

La superación de la Matemática griega estaba reservada al siglo XVII, gracias al descubrimiento de la Geometría Analítica, realizado por Descartes y Fermat, y al advenimiento del Cálculo Infinitesimal, obra simultánea de NEWTON *y* LEIBNIZ, *cuyas consecuencias llenan hoy los tratados de Ciencias Exactas.*

Cuando el hombre de las viejas civilizaciones esclavistas evoluciona, toma conciencia de la misión que le corresponde para la prosecución del bienestar común. Nace entonces la Dinámica o Mecánica del Movimiento.

Para aquellos hombres, acostumbrados al movimiento relativamente lento de vehículos arrastrados por bueyes o caballos, que debían con dificultad trepar cuestas empinadas o vencer carreteras fangosas, la noción de aceleración de velocidad, tan fácil de adquirir en nuestra época mediante el simple cambio de una palanca de automóvil, resultaba un concepto completamente nuevo y difícil de concebir.

Los matemáticos empiezan luego a interesarse por los problemas del movimiento, pero como no tienen al alcance de la mano más recursos que el álgebra de los árabes, cuyos principios derivan de la "geometría clásica", se ven obligados a idear un nuevo instrumento de cálculo y lo buscan en la "geometría cartesiana", creando así un Álgebra nueva que se conoce con el nombre de **"Cálculo Infinitesimal".**

A pesar de su origen vinculado a la Geometría del movimiento, sus principios se aplican a otros fines, tales como construcción de tablas de logaritmos. obtención de un valor

para π, etc., mientras sus ramas principales se ocupan exclusivamente de problemas geométricos:

1º **El cálculo diferencial,** *que determina el declive de una curva en cualquiera de sus puntos;* el coeficiente diferencial *no es más que una forma de averiguar la pendiente de una curva en un punto, siendo conocidas sus coordenadas.*

2º **El cálculo integral,** *que determina principalmente el área de superficie limitada por un segmento de curva.*

El "Cálculo Diferencial" y el "Cálculo Integral", emplean métodos análogos porque el área comprendida entre dos ordenadas de un segmento de curva depende del declive en esta porción de línea que la cierra por una parte.

La labor matemática de Isaac NEWTON, *íntimamente vinculada a sus investigaciones de la filosofía natural, no se limitó a las cuestiones infinitesimales, sino que abarcó varias zonas del Álgebra y de la Geometría. Sin embargo, la contribución más importante de Newton a los métodos infinitesimales fue su método de "fluxiones", que constituyó el tema de un tratado escrito en 1671, pero que no se publicó hasta 1736. Este método es geométrico-mecánico porque supone que todas las magnitudes geométricas son engendradas por movimientos de velocidades diferentes, mientras el tiempo fluye de manera continua y uniforme, razón por la cual éste no aparece sino implícitamente en las velocidades, en las velocidades de velocidades, etc.*

Las consideraciones infinitesimales de LEIBNIZ, *se encuentran ya en manuscritos de 1673, donde afirma que el problema* de la tangente *y* el de la cuadratura son inversos *y encuentra relaciones entre la sumas de los elementos geométricos, que preludian nuestras fórmulas de cálculo integral. Pero aunque desde 1676 posee ya las reglas y fórmulas más simples del cálculo infinitesimal, su primera publicación sobre el tema es de 1684, y en ella se refiere al cálculo diferencial. Recién en 1686 aparecen sus primeros escritos relativos al cálculo integral.*

El desarrollo de todos los problemas relativos al cálculo infinitesimal en un cuerpo de doctrina completo y orgánico fue la obra de los dos sabios insignes que acabamos de citar, si bien nació en forma independiente, pero casi contemporánea. Esta circunstancia provocó una cuestión de prioridad que degeneró en una larga y lamentable polémica, iniciada por los principales protagonistas, pero proseguida en el curso del siglo XVIII por los matemáticos ingleses y continentales.

La creación, en 1813, de la "Analytical Society" en Cambridge, puso fin a la querella. Esta sociedad, mediante un fallo salomónico, logró descongelar el aislamiento de ambos bandos terminando con la falta de cooperación científica que éste provocaba como lógica consecuencia.

El **Cálculo Infinitesimal** *se aplica exitosamente a la Mecánica, a la Astronomía, a la Geodesia y a las diversas ramas de la Física. Es por eso que los hombres de ciencia de aquella época pudieron afirmar que la Matemática es la clave mediante la cual se pueden descubrir los secretos de la naturaleza, para aprovechar sus leyes en beneficio de la Humanidad.*

LOS AUTORES.

CÁLCULO INFINITESIMAL

CONSTANTES Y VARIABLES LIMITES Y CONTINUIDAD 1

Se denomina *variable* todo símbolo que represente indistintamente cada uno de los números de un conjunto.

Se llama *constante* todo símbolo que representa un solo número de un conjunto.

Para definir un conjunto de valores basta dar una variable que los represente. Por lo tanto, ya se conoce una ley por medio de la cual se puede establecer si un número está o no en el conjunto.

Sea x una variable.

Si podemos asignarle valores enteros, será una variable entera; si, además, puede recibir valores fraccionarios, será racional; será real, si los valores que se le atribuyen son números reales.

Función de una variable. — Consideremos dos variables x e y relacionadas por la potencia cúbica

$$y = x^3$$

Diremos en este caso que y es una función de x. En general, *dadas dos variables* x *e* y, *se dice que* y *es una función de* x *cuando a cada valor de* x *corresponde uno de* y, *determinado por una ley cualquiera.*

Una *función* es una correspondencia que asigna a cada

elemento de un conjunto llamado *dominio*, un elemento de otro conjunto llamado *codominio*.

Si en el ejemplo anterior asignamos a x valores arbitrarios, obtendremos un conjunto de valores para y

Cuando $x = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots\ldots$

será $y = 1;\ 8;\ 27;\ 64;\ldots\ldots$

La variable y es función de x; además, es variable *dependiente*, mientras que x es variable *independiente* o *argumento.*

A veces dando valores a la variable x se obtienen, no solamente un valor para la función, sino varios o hasta infinitos valores. A las funciones de este tipo se las llama *multiformes* en contra de la denominación de *uniformes* que reciben las otras.

Ejemplo:

$$y = \pm \sqrt{x}$$

En este caso resultan dos valores para y por cada valor dado de x: uno positivo y otro negativo.

En efecto:

Sea $y = f(x) = \pm \sqrt{x}$ **(función multiforme)**

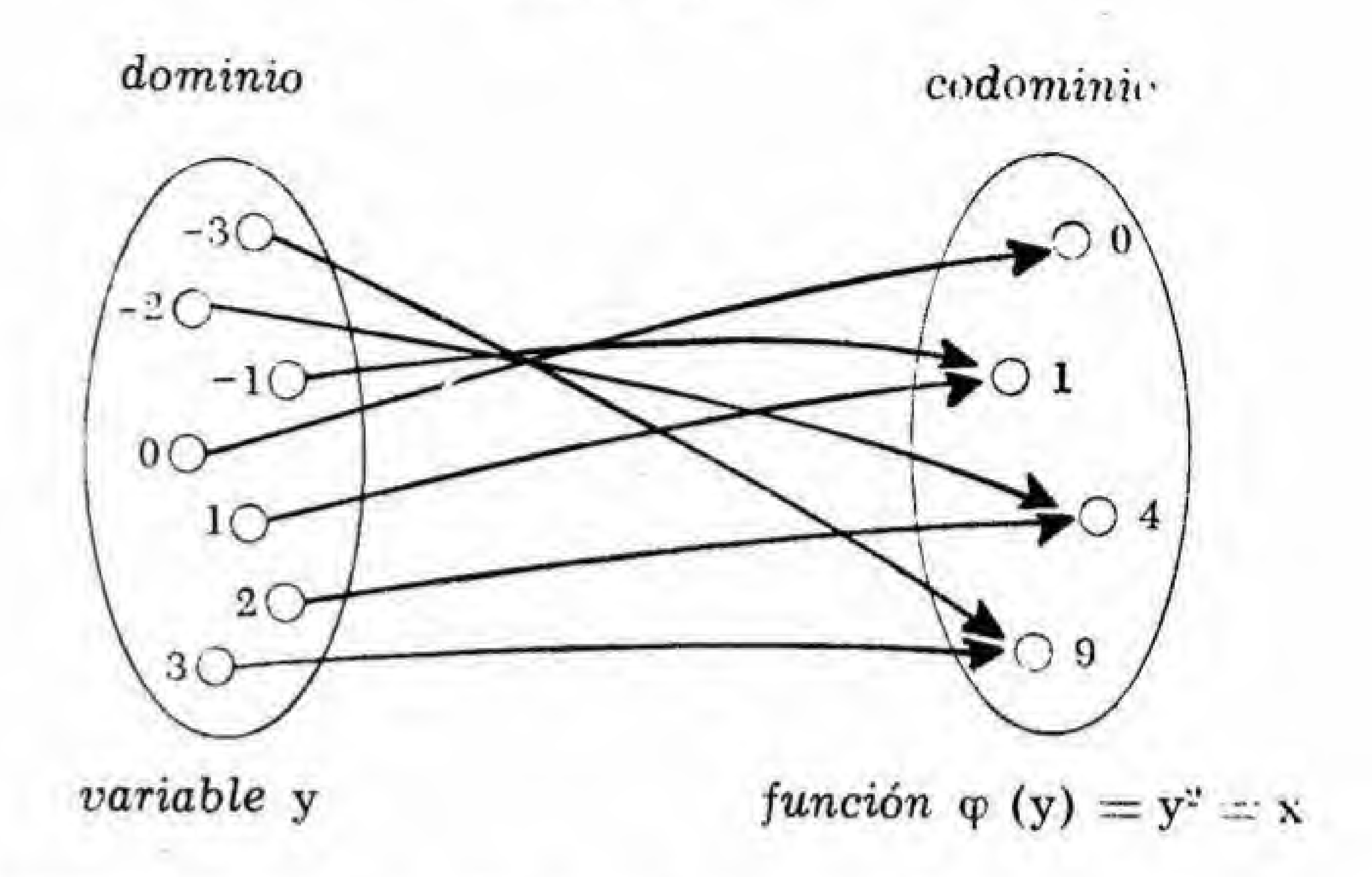
Intercambiando los papeles resulta

$x = \varphi(y) = y^2$ (función uniforme)

Tabla de valores

y (dominio)	—3	—2	—1	0	1	2	3	...
x (codominio) ...	9	4	1	0	1	4	9	.

Diagrama



A veces es posible dividir una función del tipo multiforme en dos o más *ramas* de modo tal que cada una de estas ramas constituya una función uniforme. La *función multiforme o multivoca*

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

puede dividirse en dos *funciones uniformes:*

$$y = + \sqrt{25 - x^2} \quad ; \quad y = - \sqrt{25 - x^2}$$

Estas divisiones en *ramas uniformes* son de una evidente utilidad.

Las *funciones algebraicas* se caracterizan porque la variable está sometida a operaciones aritméticas o bien puede figurar como divisor o bajo signo radical.

Las *funciones trascendentes* son las que no pueden reducirse a funciones algebraicas.

EJEMPLOS:

a) *Funciones algebráicas*:

$$y = 8x^4 - 2 \quad ; \quad y = -\sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad y = \frac{4}{x} - 2$$

b) *Funciones trascendentes*:

$$y = \log(x + 2) \quad ; \quad y = \operatorname{tg} x \quad ; \quad y = \operatorname{sen} x \quad ; \quad y = e^x$$

Las funciones se clasifican en *explícitas* e *implícitas*.

Será explícita una función cuando la correspondencia entre las dos variables viene definida directamente

$$y = 4x^2 - 3 \quad ; \quad y = \log x$$

En cambio, será *implícita* cuando para determinar el valor de y hay que despejar, vale decir, resolver una ecuación.

Ejempios:

$$15y - 3x + 2 = 0 \quad ; \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Para representar en general una función se antepone al argumento una letra que se llama **característica** y que simboliza o expresa las operaciones que tienen que efectuarse con la variable x para obtener los valores de la función y.

Notación

$$y = f(x) \quad ; \quad y = F(x) \quad\quad y = \varphi(x)$$

Representación gráfica de una función por coordenadas cartesianas.

Sea la función

$$y = f(x)$$

Si elegimos como abscisas los valores de la variable x y como *ordenadas* los valores que toma la función y, cada valor de la variable independiente, determina, con el valor correspondiente de la función, un punto; el conjunto de estos puntos forma una figura que recibe el nombre de *gráfica de la función*.

Dado que en la práctica resulta imposible determinar los infinitos puntos de la gráfica de una función, se determinan sólo algunos de ellos y se toma como gráfica un trazo continuo que una estos puntos.

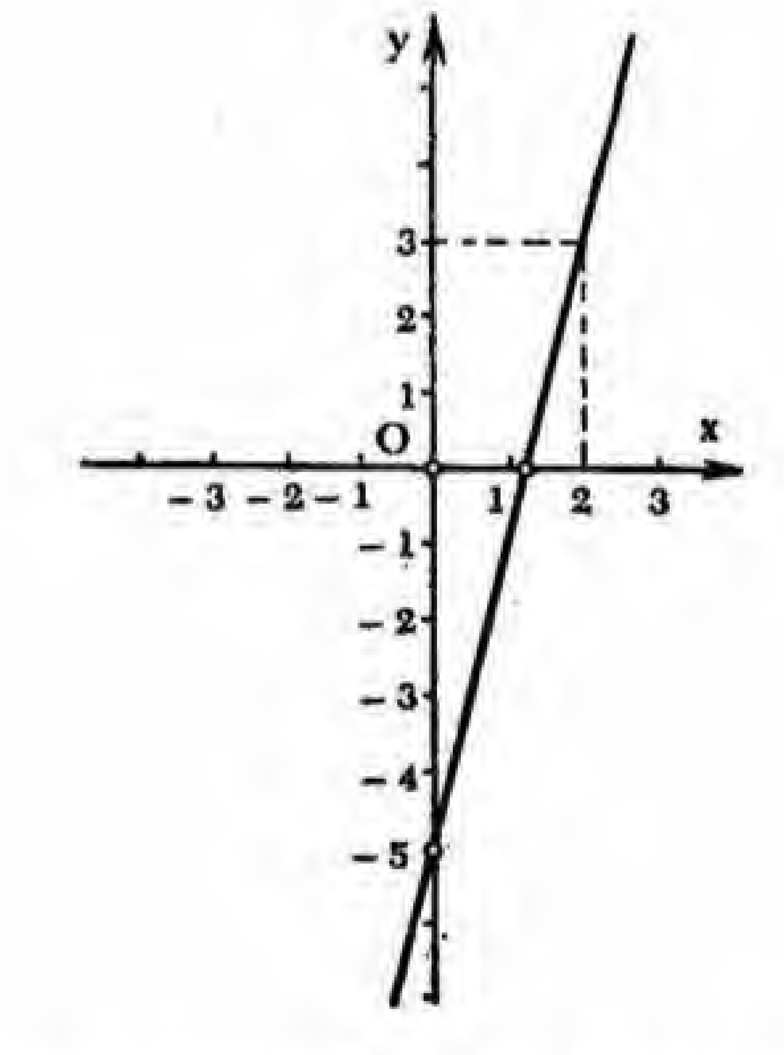
EJEMPLOS:

I) *Graficar:*

$$y = 4x - 5$$

Cuadro de valores

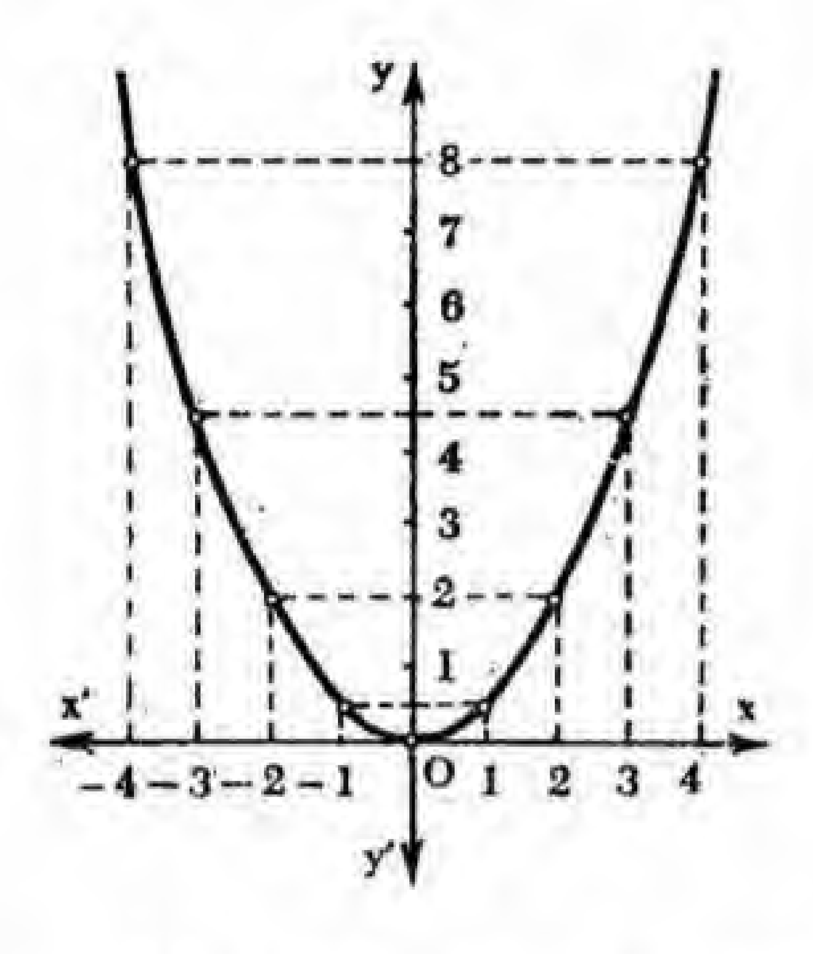
x	0	2
y	-5	3



La función se llama *lineal*, ya que su imagen geométrica representa **una recta.**

II) *Representar gráficamente*

$$y = \frac{x^2}{2}$$



Cuadro de valores

x	y
0	0
1	½
2	2
3	4,5
4	8
—1	½
—2	2
—4	8

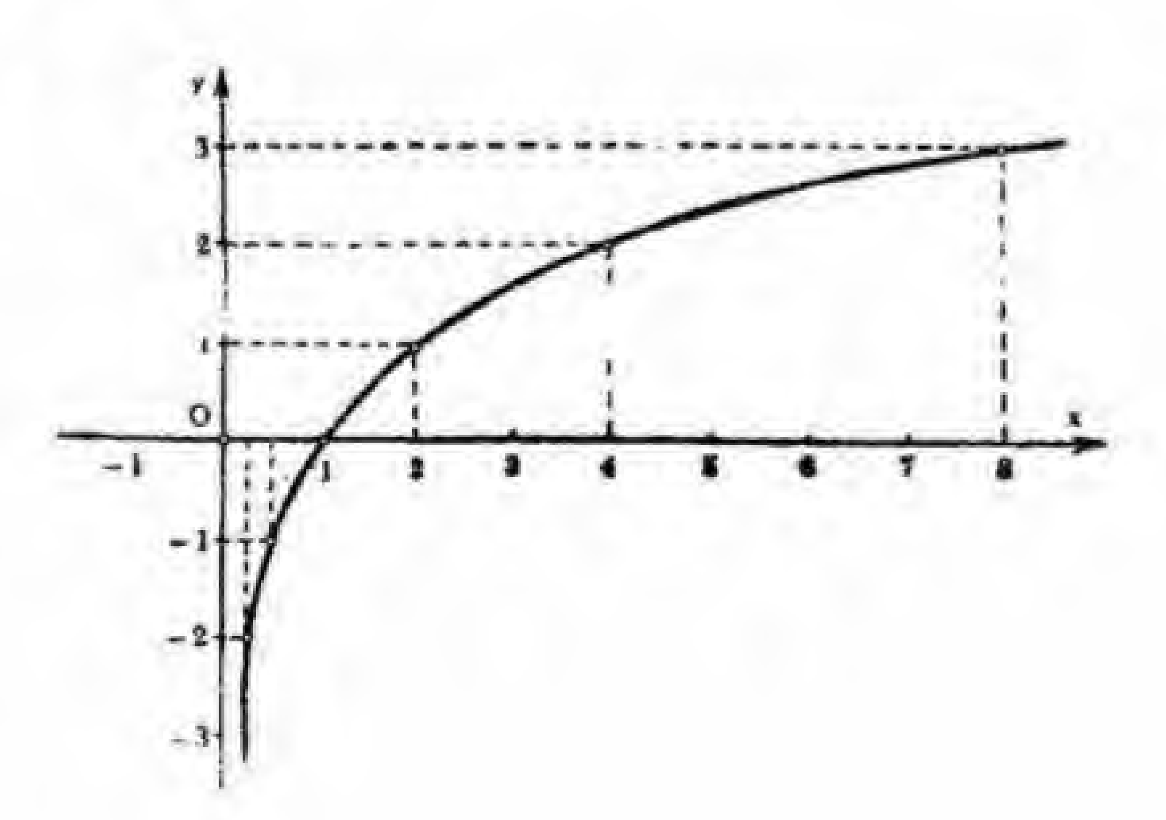
La función se llama *potencial* y su representación gráfica se llama **parábola.**

III) *Representar la función logarítmica*

$$y = \log_2 x$$

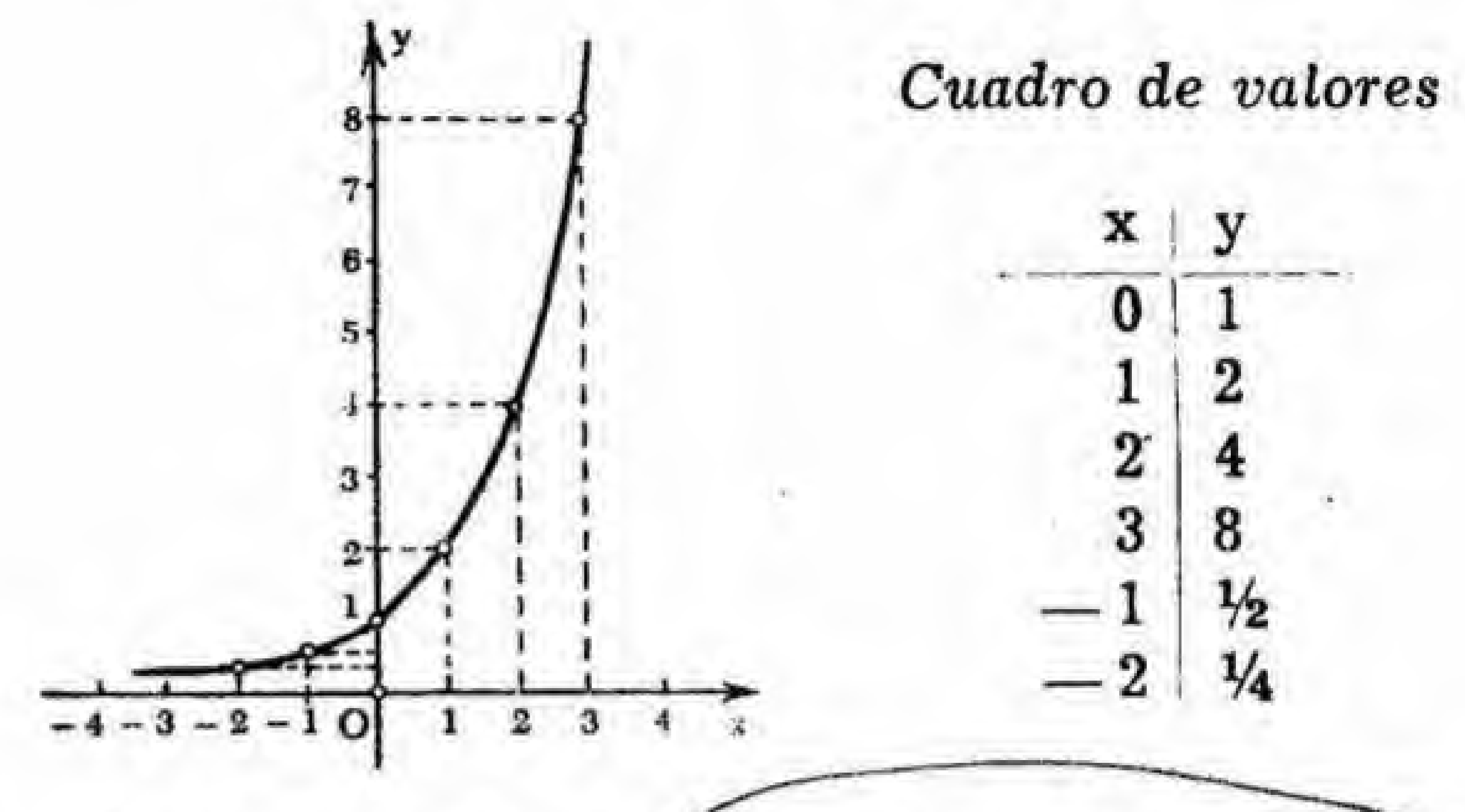
Cuadro de valores

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
½	— 1
¼	— 2



VI) *Representar la función exponencial*

$$y = 2^x$$

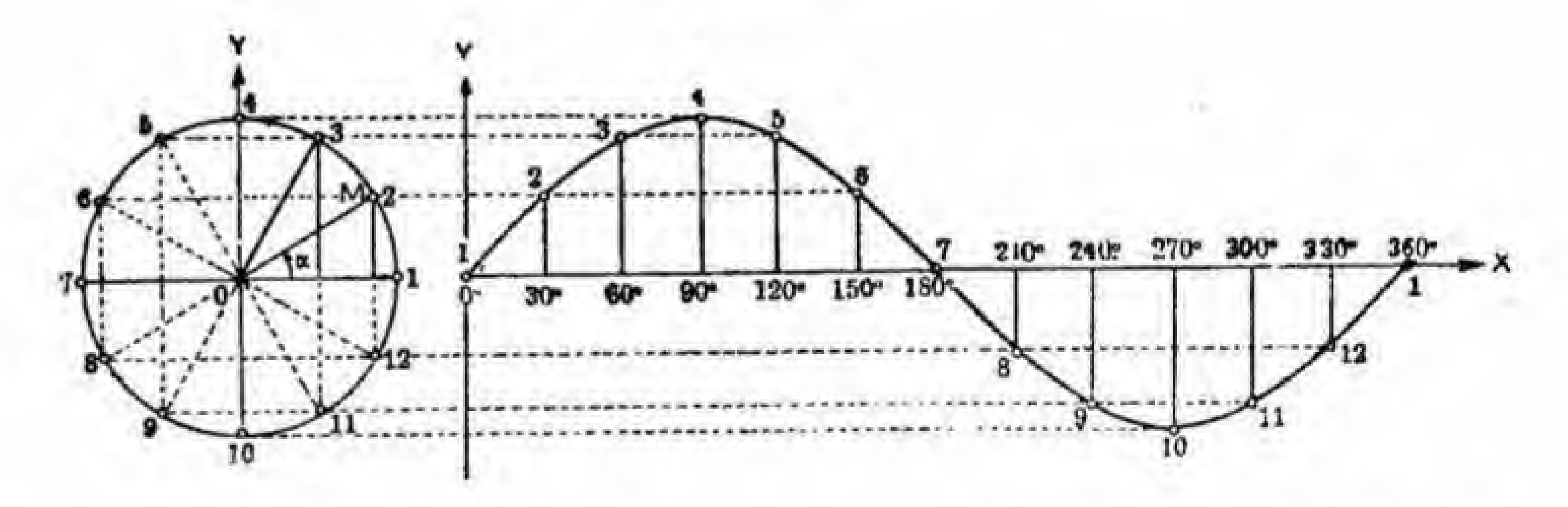


Cuadro de valores

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
—1	½
—2	¼

V) *Representar la función trigonométrica*

$$y = \text{sen } x$$



Conviene anexar al par de ejes cartesianos un círculo trigonométrico para que se vea la igualdad entre las alturas del seno en dicho círculo y las ordenada de la función.

La curva representativa de la función seno se llama *sinusoide.*

LIMITE DE UNA FUNCION

Se dice que *una función de la variable x tiende al límite* L *al tender x* a *a*, cuando el valor absoluto de la **diferencia**

entre el número L y la función puede llegar a hacerse tan pequeño como se quiera o sea

$$|L - f(x)| < \varepsilon$$

con solo dar a x valores que difieran de a cantidades ínfimas, es decir

$$|a - x| < \delta$$

siendo ε y δ números tan pequeños como se quiera.

Notación

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$$

Conviene aclarar que a puede ser un valor cualquiera comprendido entre cero y más o menos infinito.

La función $y = x^2$ tiene *límite* cuando x tiende a cero y ese límite también es cero.

La función $y = (x - 1)^4$ tiende a cero cuando $x \to 1$ pues el valor absoluto de $(x - 1)^4$ puede hacerse tan pequeño como se quiera en las *proximidades* del punto $x = 1$.

Si se desea por ejemplo hacer $(x - 1)^4$, en valor absoluto, menor que un diezmilésimo, basta tomar valores de x que disten más o menos 0,1 del punto $x = 1$, pues si $|x - 1| < 0{,}1$ será $|x - 1|^4 < 0{,}1^4 = 0{,}0001$.

En general, si se quiere que resulte

$|x - 1|^4 < \varepsilon$ (numero positivo arbitrariamente pequeño)

habrá que tomar

$$|x - 1| < \sqrt[4]{\varepsilon}$$

o sea, debe verificarse

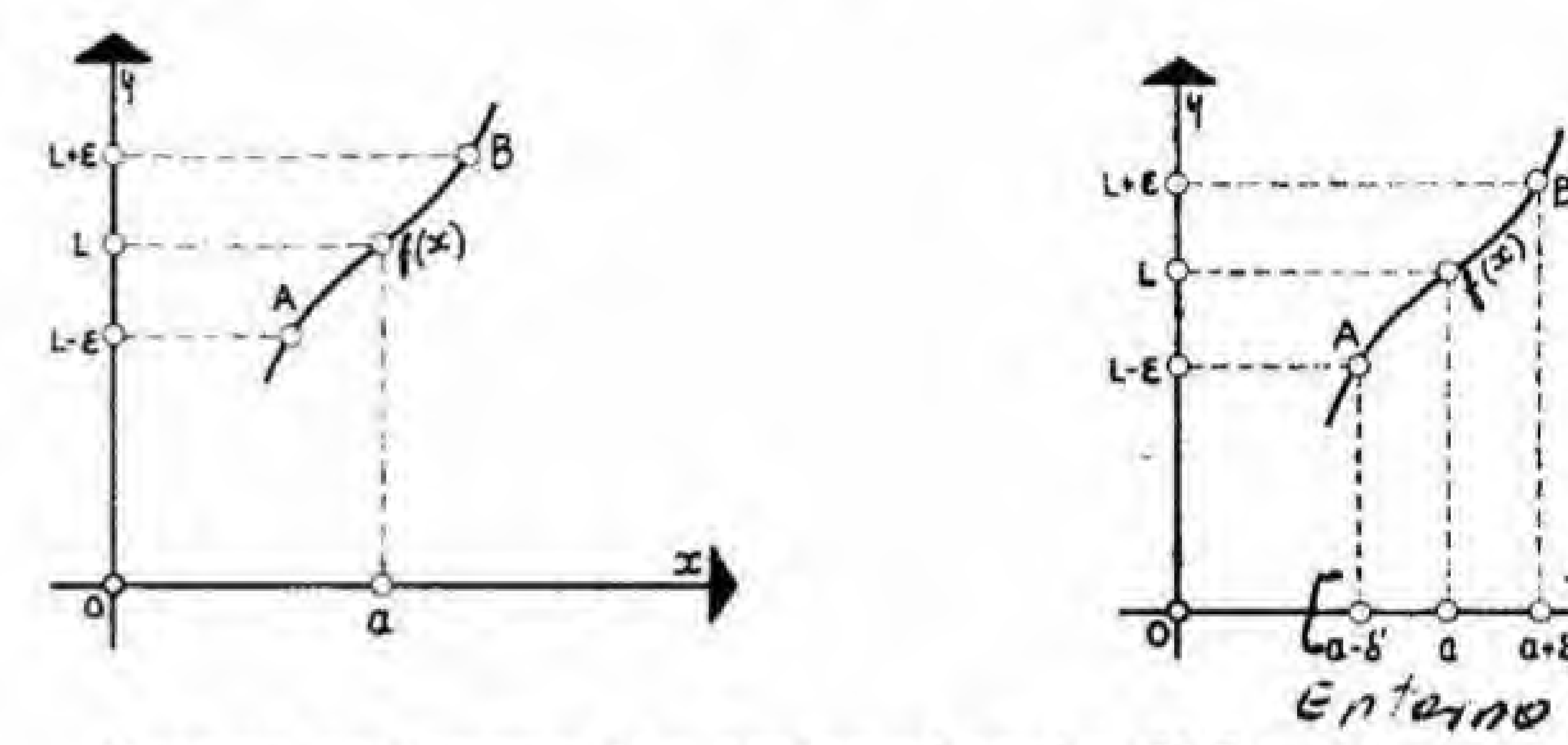
$$1 - \sqrt[4]{\varepsilon} < x < 1 + \sqrt[4]{\varepsilon}$$

Gráficamente la definición de límite puede interpretarse de la siguiente manera:

Trazada la gráfica de la función y dado un valor de ε se trazan las paralelas

$$y = L + \varepsilon \quad ; \quad y = L - \varepsilon$$

quedando determinados los puntos A y B.



Luego se trazan las ordenadas de dichos puntos. Si para cualquier valor de x del entorno $[a - \delta'/a + \delta]$ así determinado, las ordenadas de $f(x)$ están entre las paralelas $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$, se dice que *en el punto a el límite de la función* $f(x)$ *es* L.

Puede suceder que la función no esté definida en el punto $x = a$. Tal será el caso de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

que no está definida en el punto $x = 1$; en efecto

$\dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$ (este cociente se descarta de las operaciones aritméticas).

Sin embargo podremos calcular el límite de esta fun-

ción cuando $x \to 1$ considerando lo que ocurre con la función en los puntos cercanos a $x = 1$.

Los valores de $f(x)$ para $x \neq 1$, pero próximos a 1, se anotan en el cuadro siguiente

x	0	0,5	0,8	0,9	1	1,08	1,1	1,2
$f(x)$	1	1,5	1,8	1,9	$\frac{0}{0}$	2,08	2,1	2,2

Examinando esta tabla observamos que cuando la variable x se aproxima a uno, el valor de la función tiende a dos y la diferencia, en valor absoluto, $|2 - f(x)|$ podrá hacerse ínfima.

Por lo tanto,

$$\lim \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right] = 2 \quad \text{si} \quad x \to 1$$

Se conviene en tomar como límite de $f(x)$ para $x \to 1$ al número *dos* que se llama **verdadero valor**.

Analíticamente, en nuestro caso se obtiene el mismo resultado aplicando un recurso algebraico: factorizando el numerador y luego simplificando con el objeto de eliminar el factor que origina la indeterminación.

En efecto:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \right] = \lim_{x \to 1} [x + 1]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} [x + 1] = 1 + 1 = 2$$

INFINITESIMO

Se llama *infinitésimo* a una variable positiva o negativa, que tiende a cero.

Es decir, un infinitésimo es una variable que tiene por límite cero.

Teniendo en cuenta que

$$0{,}2^2 = 0{,}04$$
$$0{,}2^3 = 0{,}008$$
$$0{,}2^4 = 0{,}001.6$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0{,}2^{10} = 0{,}000.000.102.4$$

resulta evidente que si la *variable* es una potencia cuyo exponente tiende a infinito y la base es un número comprendido entre $(+1)$ y (-1), el *límite de dicha potencia es un infinitésimo*.

Simbólicamente:

$$\lim (x^n) = 0$$
$$\text{si} \quad n \to \infty$$
$$\text{y} \quad |x| < 1$$

Ejemplos:

$\operatorname{sen} \alpha$ es *infinitésimo* cuando $\alpha \to 0$

$\cos \alpha$ es *infinitésimo* cuando $\alpha \to \frac{3\pi}{4}$

$(4x - 1)^2$ es *infinitésimo* cuando $x \to \frac{1}{4}$

Observación. — No existen números infinitésimos, sino

funciones infinitésimas en un punto, o bien variables infinitésimas.

Entre los infinitésimos (x^n) se establece un orden según cual sea el exponente y diremos que x, x^2, x^3, ... x^n, ... son infinitésimos de 1º, 2º, ..., n-simo orden.

Las propiedades fundamentales de los infinitésimos, son:

I) *El producto de un infinitésimo por un número* (q) *es también un infinitésimo.*

Si $\lim (x^n) = 0$
y $q \neq 0$

resulta que el producto $q\,x^n$ es un infinitésimo.

II) *La suma algebraica de* (q) *infinitésimos es también un infinitésimo.*

III) *Dos infinitésimos son equivalentes cuando su cociente es igual a la unidad,* es decir, que se aproximan a cero con la misma rapidez, al acercarse la variable al valor fijo considerado.

Cuando dos infinitésimos son equivalentes es lícito reemplazar uno por otro en los cálculos en que intervengan.

Propiedad sobre límites.

En el cálculo de límite de una función tiene aplicación la siguiente propiedad:

Supongamos que *u*, *v* y *t* son funciones de la variable *x*, siendo

$$\lim u = A \iff x \to a$$

$$\lim v = B \iff x \to a$$

$$\lim t = C \iff x \to a$$

En tal caso

I) $$\lim_{x \to a} (u + v - t) = A + B - C$$

II) $$\lim_{x \to a} (u \cdot v \cdot t) = A \cdot B \cdot C$$

III) $$\lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B} \iff B \neq 0$$

En el último caso debe ser $B \neq 0$.

En síntesis: *El límite de una suma algebraica, de un producto y de un cociente de funciones es igual, respectivamente, a la suma algebraica, al producto o al cociente de los límites respectivos.*

Límites notables. — Ciertos límites particulares que se presentan frecuentemente se dan a continuación.

Siendo la constante $c \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{c}{x}\right) = \infty \qquad \text{o bien} \qquad \frac{c}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (cx) = \infty \qquad \text{o bien} \qquad c \cdot \infty = \infty$$

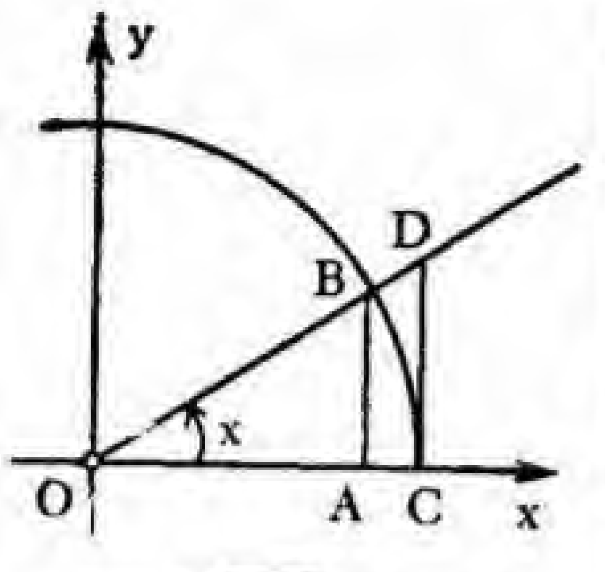
$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x}{c}\right) = \infty \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\infty}{c} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{c}{x}\right) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{c}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$$

Estos límites son útiles para calcular el límite del cociente de dos polinomios cuando la *variable tiende a infinito*.

Límite de la relación entre el seno y su arco al tender a cero.



med $\overline{AB} = \text{sen } x$

$\overset{\frown}{BC} = x$

med $\overline{CD} = \text{tg } x$

siendo $r = 1$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 1$$

En efecto:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

o bien

$$\text{sen } x < x < \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

dividiendo por sen x

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{sen } x}{\cos x \ \text{sen } x}$$

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

Por una propiedad de las desigualdades, invirtiendo

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Pasando al límite

$$1 > \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) > \lim_{x \to 0} \cos x$$

$$1 > \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) > 1$$

luego

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 1$$

Aplicaciones

Verdadero valor. Si la expresión numérica de una función f (x) no tiene sentido preciso para $x = a$ y en cambio está bien definido el límite L de f (x) cuando $x \to a$, se considera a este límite L como el verdadero valor de la función f (a)

I) *Hallar el límite de* $\dfrac{5}{x}$

a) cuando (x) es infinitamente pequeño y positivo, el límite de

$$\frac{5}{x} = +\infty$$

b) cuando (x) es infinitamente pequeño y negativo, el límite de

$$\frac{5}{x} = -\infty$$

II) *Calcular el límite de* $\left(\dfrac{1}{x^2} \right)$

Si $\quad x \to 0 \quad \lim \left(\dfrac{1}{x^2} \right) = +\infty$

III) *Calcular el límite de* $\dfrac{5x + 2}{x - 2}$

Si $\quad x \to 2 \quad \lim \dfrac{5x + 2}{x - 2} = +\infty$

IV) *Calcular el límite de* $x^2 + 14x$

Si $\quad x \to 2 \quad$ resulta

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4 \qquad \lim_{x \to 2} 14x = 28$$

y dado que el límite de una suma es la suma de los límites de los sumandos, se tiene

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 14x) = 32$$

V) *Hallar el límite de* $\dfrac{y^2 - 10}{y + 2}$

Si $\quad y \to 2$

el numerador tiene por *límite* $(y^2 - 10) = -6$

el denominador tiene por *límite* $(y + 2) = 4$

luego

$$\lim_{y \to 2} \frac{y^2 - 10}{y + 2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

VI) *Calcular el límite de* $\dfrac{10x^3 - 2x^2 + 5}{7x^3 - x - 10}$

a) Si $x \to \infty$

Tomando x suficientemente grande podemos hacer que el primer término del numerador y del denominador sea tan grande como queramos. Es decir, podemos tomar $(10x^3)$ y $(7x^3)$ como el equivalente respectivo de la expresión completa con un error tan pequeño como queramos.

Despreciando entonces todos los términos, excepto $(10x^3)$ y $(7x^3)$, el límite será:

$$\frac{10x^3}{7x^3} \quad \text{o bien} \quad \frac{10}{7}$$

b) Si $x \to 0$

$$\lim \frac{10x^3 - 2x^2 + 5}{7x^3 - x - 10} = -\frac{5}{10}$$

VII) *Calcular el límite de* $\dfrac{10x + 2}{2x + 3}$, si $x \to \infty$

Primer procedimiento:

Para determinar el límite se dividen numerador y denominador por la mayor potencia de la variable que entre en la fracción, en este caso por x, luego queda

$$\frac{10 + \dfrac{2}{x}}{2 + \dfrac{3}{x}}$$

pasando al límite, resulta $\dfrac{10 + 0}{2 + 0} = \dfrac{10}{2}$ o bien 5

Con símbolos

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{10x + 2}{2x + 3} \right) = 5$$

Segundo procedimiento:

Teniendo en cuenta las consideraciones del ejemplo VI se tiene que el límite es $\dfrac{10x}{2x}$ o bien $\dfrac{10}{2}$

o sea

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{10x + 2}{2x + 3} \right) = 5$$

VIII) *Calcular el límite de* $\dfrac{4y^2 + 3y + 2}{2y^3 + 3y + 8}$; si $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \left[\frac{4y^2 + 3y + 2}{2y^3 + 3y + 8} \right] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

IX) *Calcular el límite de* $\dfrac{8x^3 + 5x^2 + 2}{2x^3 - 2x - 1}$; si $x \to \infty$

Despreciando en el numerador y en el denominador todos los términos menos el primero, el límite es:

$$\frac{8x^3}{2x^3} \quad \text{o bien} \quad \frac{8}{2}$$

Simbólicamente

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{8x^3 + 5x^2 + 2}{2x^3 - 2x - 1} \right) = 4$$

Resuelva el lector este ejercicio siguiendo el procedimiento aplicado en el ejemplo (VI).

X) *Calcular el límite de*

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$$

cuando $x \to (+2)$

Reemplazando (x) por $(+2)$ resulta la *indeterminación* $\dfrac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación se factorean ambos trinomios de segundo grado;

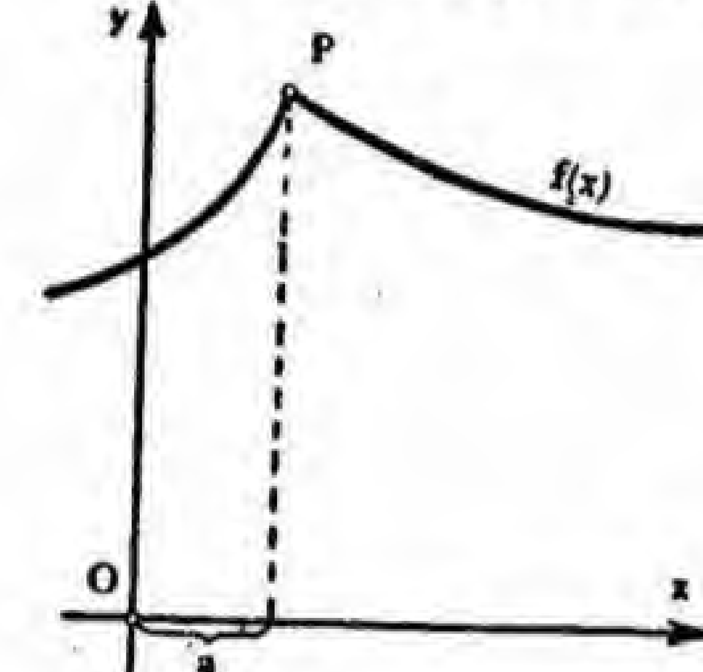
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 5)(x - 2)} \quad \frac{x - 3}{x - 5}$$

Para $x = +2$, resulta que $\lim \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} \right) = \dfrac{1}{3}$

FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

En el capítulo anterior al representar gráficamente diversas funciones, uníamos los valores obtenidos por la función en 6 ó 7 puntos diferentes por medio de un trazo continuo; pero en rigor no se puede efectuar esta operación hasta no saber si realmente la función no presenta alguna fractura que destruya la continuidad del trazo.

Por lo tanto, es necesario definir primeramente la *continuidad en un punto*, es decir, la continuidad para un valor dado de x.



La *primera condición* de continuidad es ***que exista un punto P de la curva que corresponda al $x = a$;*** **lo que supone que dicha curva no tiene huecos, o sea que presenta un trazo continuo.**

Segunda condición: que, *al movernos a lo largo de la curva, nos aproximemos tanto como queramos al punto P a medida que $x \to a$,* lo mismo si lo hacemos a un lado que al otro de este punto; lo que significa que la curva no dé un salto al pasar por P. En síntesis, una curva es continua en un punto $x = a$ cuando no presenta ni fractura ni salto en dicho punto.

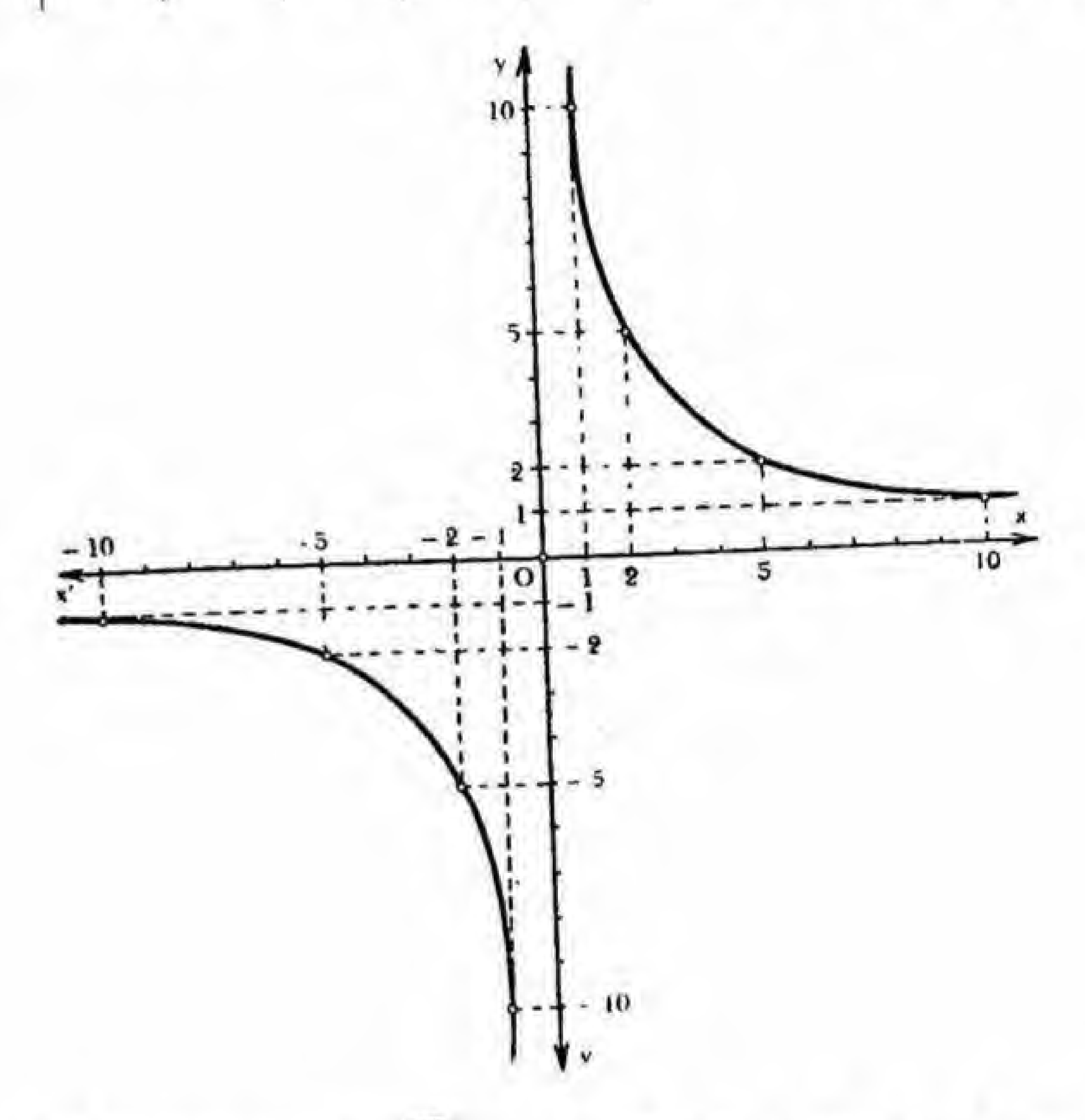
La figura siguiente es *discontinua* por presentar fractura en el punto $x = 0$.

En efecto, el *gráfico de la función*

$y = \frac{10}{x}$ (hipérbola equilátera) es discontinuo.

Cuadro de valores

x	10	5	2	1	−1	−2	−5	−10	∞
y	1	2	5	10	−10	−5	−2	−1	0



La función *y* es *discontinua* en el punto de abscisa cero.

Por todo lo expuesto se puede aceptar la siguiente *definición:*

Se dice que una función es **continua** *en un punto $x = a$ cuando en ese punto se verifican las siguientes condiciones:*

1ª) La función f(x) **está definida en el punto** $x = a$:

$$f(a) \text{ está } \textbf{definida} \quad ; \quad f(x) = f(a) \neq \infty$$

Ejemplo: Si $f(x) = \frac{1000}{x-2}$, para $x = 4$ es $f(4) = 500$.

2ª) La función **admite límite en ese punto:**

$\lim_{x \to a} f(x)$ **existe** ; $\lim_{x \to a} f(x) = L(a)$ no indeterminado

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{1000}{4-2} = 500$

3ª) El **valor de la función** en ese punto **coincide** con el **valor del límite** en ese punto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

LIMITE LATERAL

Límite de la derecha ($L^{(+)}$)

Una función f(x) puede tener límite cuando x tiende a a tomando x sólo valores superiores a a. En este caso, se dice que la función tiene *límite a la derecha* $\underset{x \to a}{f(x)} = L^{(+)}$

Límite de la izquierda ($L^{(-)}$)

Cuando x tiende a a tomando sólo valores inferiores a a, se dice que f(x) tiende a un valor $L^{(-)}$ que se llama el *límite a la izquierda*: $\lim_{x \to a} f(x) = L^{(-)}$.

Si es

$$L^{(+)} = L^{(-)} = L$$

evidentemente es

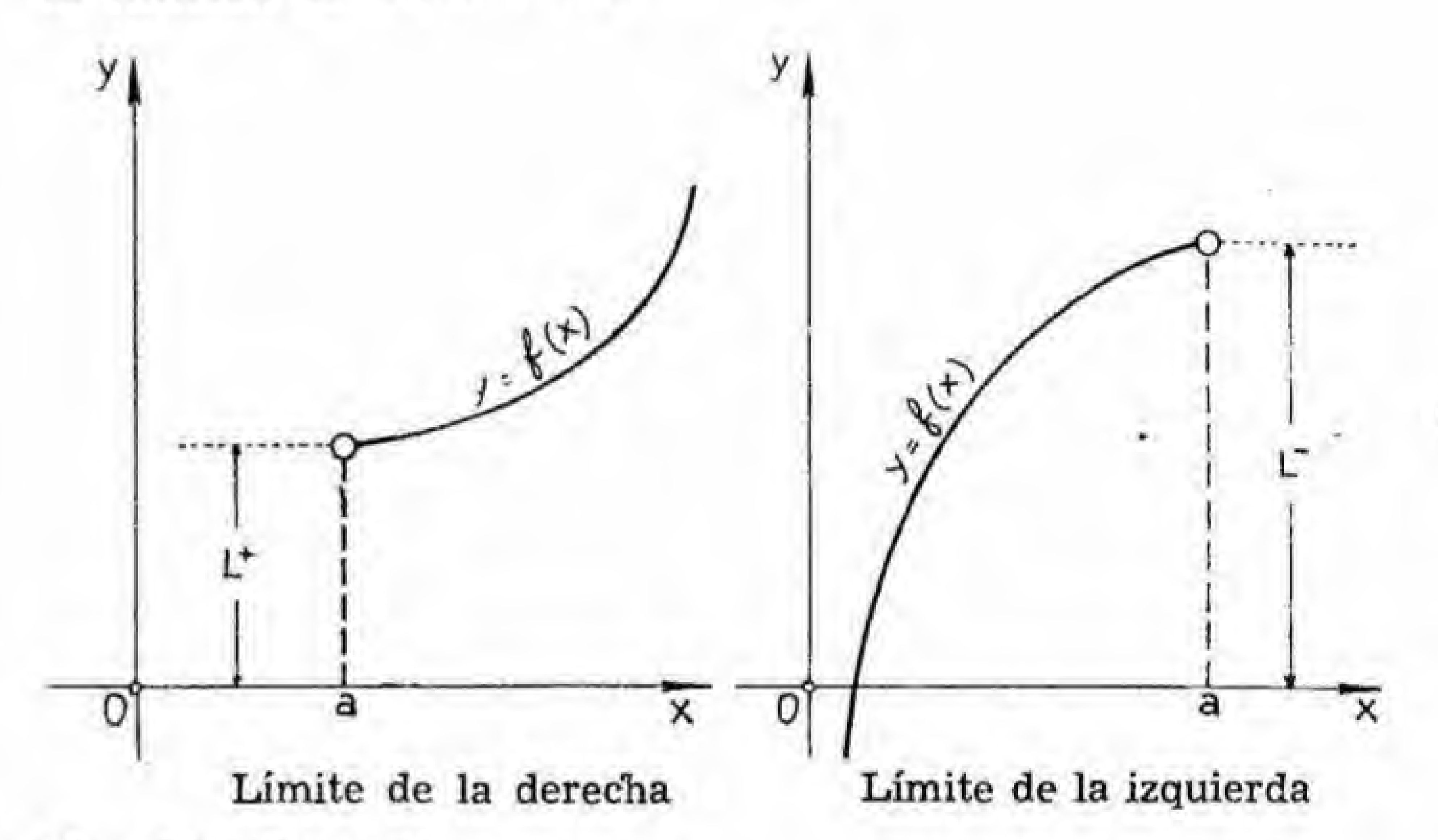
$$L = \text{Límite}_{x \to a} f(x)$$

luego la función es *continua*.

Si es

$$L^{(+)} \neq L^{(-)}$$

la función es *discontinua*.



Límite de la derecha — Límite de la izquierda

Función discontinua

La función es *discontinua* en un punto cuando en él no se satisface alguna de las condiciones de continuidad.

En Economía las funciones reales son discontinuas, por lo que hay que resolverlas por medio de **aproximaciones**.

Las funciones discontinuas pueden ser de dos tipos: *a*) evitable, y *b*) esencial, de primera o de segunda especie.

Función discontinua evitable

Se dice que una *discontinuidad es evitable* cuando no se cumple la primera condición de la continuidad, es decir, la función *no está definida* en el punto $x = a$, *pero tiene límite.*

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 2} y = 200 \cdot \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2} y = 200 \cdot \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} y = 200 \cdot (x+2)$$

$$y = 200 \cdot 4 = 800$$

Función discontinua de la primera especie

Se dice que una función es *discontinua* de tipo *esencial* de la *primera especie* cuando no cumple la primera y la segunda condición de la continuidad y en consecuencia no cumple la tercera condición, pero admite *límite lateral*. Para hallarlo se calcula el promedio de los dos límites $L^{(+)}$ y $L^{(-)}$, el cual se considera límite de la función en el punto.

EJEMPLO:

Calcular el límite de la función total.

Sea el sistema

$$\begin{cases} y = 20000\,x - x^2 \\ y = 300\,x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

en el que

$$\underset{x > 10000}{u = 20000\,x - x^2} \quad ; \quad \underset{0 \leq x \leq 10000}{v = 300 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

$$L^{(+)} = \lim 20000\,x - x^2 = 20000 \cdot 10000 - 10000^2 =$$

$$= 2 \cdot 10^8 - 1 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^8$$

$$L^{(-)} = \lim 300 \cdot x^{\frac{3}{2}} = 300 \cdot \sqrt{10000^3} = 300 \cdot 100^3 = 3 \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow L = \frac{L^{(+)} + L^{(-)}}{2} = \frac{1 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^8}{2} = 2 \cdot 10^8$$

Función discontinua de la segunda especie

Se dice que una función es *discontinua* de tipo *esencial* de la *segunda especie* cuando no se cumple ninguna de las tres condiciones de continuidad. No tiene solución.

EJEMPLO:

Sea la función total

$$\begin{cases} q = f(x) = \dfrac{20000}{x^2 - 100} \quad ; \quad x \geq 10 \\ p = \varphi(x) = 2375{,}4\sqrt{x} \quad ; \quad x \leq 10 \end{cases}$$

La función es discontinua de la segunda especie porque no tiene límite lateral de la derecha.

Ejercicios

Calcular el verdadero valor de las expresiones:

1) $5 + \frac{4}{x}$ si $x \to \infty$ R.: 5

2) $\frac{(2x-3)(3-5x)}{7x^2-6x+4}$ si $x \to \infty$ R.: $-\frac{10}{7}$

3) La misma función si $x \to 0$ R.: $-\frac{9}{4}$

4) $\frac{x^4+9}{(3x^2-1)^2}$ si $x \to \infty$ R.: $\frac{1}{9}$

5) La misma función si $x \to 0$ R.: 9

6) $\frac{2y-1}{y(y-1)}$ si $y \to \infty$ R.: 0

7) $\frac{4y^2-3}{2y^3+3y^2}$ si $y \to \infty$ R.: 0

8) $\frac{4z+5}{2z+3}$ si $z \to \infty$ R.: 2

9) $\frac{x^2-4}{x-2}$ si $x \to 2$ R.: 4

10) $\frac{t^4-a^4}{t^2-a^2}$ si $t \to a$ R.: $2a^2$

11) $\frac{3+2x}{x-3}$ si $x \to 2$ R.: -7

12) $\frac{x^4-a^4}{x-a}$ si $x \to a$ R.: $4a^3$

13) $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ si $x \to a$ R.: $3a^2$

14) $\frac{8x^3-64}{2x-4}$ si $x \to 2$ R.: 48

15) $\frac{2x+1}{x-1}$ si $x \to \infty$ R.: 2

16) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{\operatorname{sen} x - 1}$ para $x \to 90°$ R.: 2

17) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}$ para $x \to 45°$ R.: -1

18) $\frac{4\operatorname{sen}^4 x - 4}{\operatorname{sen}^2 x - 1}$ para $x \to 90°$ R.: 8

19) $\frac{10}{x+1}$ para $x \to 4$ R.: 2

20) $\frac{x^2+6x-1}{5x+3}$ para $x \to 0$ R.: $-\frac{1}{3}$

21) $\frac{ax^4+bx^3+cx^2}{kx^4+mx^3+nx^2}$ para $x \to \infty$ R.: $\frac{a}{k}$

22) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ para $x \to 3$ R.: $\frac{\sqrt{3}}{36}$

23) $\frac{2x}{x^2-a^2} - \frac{1}{x-a}$ para $x \to a$ R.: $\frac{1}{2a}$

24) $\frac{x^2-16}{4x^3-16x^2}$ para $x \to 4$ R.: $\frac{1}{8}$

25) $\frac{\operatorname{cotg} x}{\cos x}$ para $x \to \frac{\pi}{2}$ R.: 1

26) $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{5}}{x}$ para $x \to 0$ R.: $\frac{1}{5}$

27) $x^2 \cdot \operatorname{sen} 2x$ para $x \to \pi$ R.: 0

28) $\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ para $x \to 0$ R.: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

29) $\frac{\sqrt{1+y+y^2}-1}{y}$ para $y \to 0$ R.: $\frac{1}{2}$

30) $\dfrac{2x^2 - 4x - 6}{2(x-3)(x+2)}$ para $x \to \infty$ R.: 1

31) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \to 1$ R.: $\dfrac{2}{3}$

32) $\dfrac{32x^5 - 1}{2x - 1}$ para $x \to \dfrac{1}{2}$ R.: 5

33) $\dfrac{32x^5 - 3^5 a^5}{2x - 3a}$ para $x \to \dfrac{3}{2}a$ R.: $405 a^4$

Determinación del tipo de discontinuidad

1) *Determinar si la función* $y = \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ *es discontinua evitable*, para $x \to 2$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Para $x_1 = -3$; $y = \dfrac{-3-2}{9-3-6} = \infty$ es discontinua por dar infinito.

Para $x_2 = 2$; $y = \dfrac{2-2}{4+2-6} = \dfrac{0}{0}$ es discontinua evitable.

En efecto, hallando el *verdadero valor*

$$y = \frac{x-2}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

En otros puntos la función es continua.

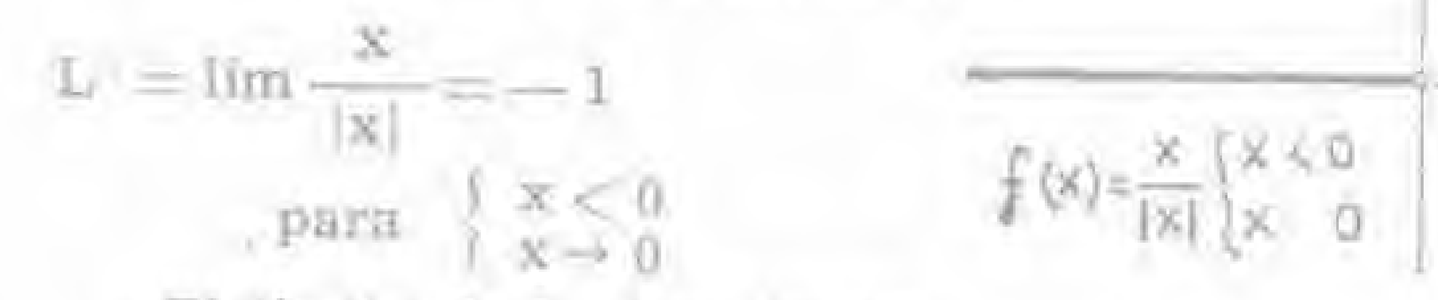
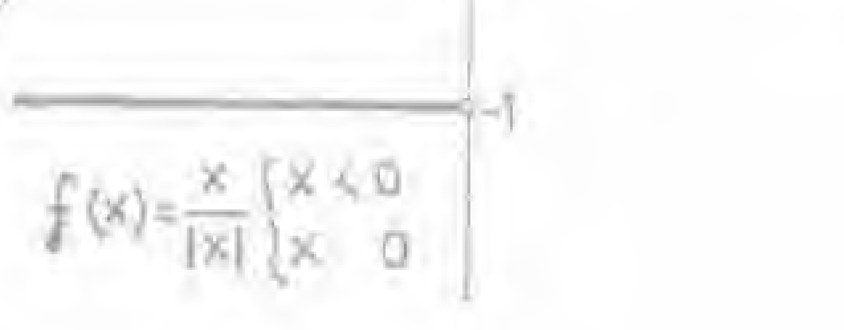
2) *Determinar si* $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{1-x}}$ *es una función discontinua evitable para* $x = 1$

Se halla el verdadero valor $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x}} = 0$

La función es *discontinua evitable* y está definida para $x = 1$ o sea $f(1) = 0$. Además la función es *continua* para $x \neq 1$.

3) *Calcular el límite de*

$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ para $x \to 0$

El límite de la derecha es

$$L^+ = \lim \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{para} \begin{cases} x > 0 \\ x \to 0 \end{cases}$$

El límite de la izquierda es

$$L^- = \lim \frac{x}{|x|} = -1 \quad \text{para} \begin{cases} x < 0 \\ x \to 0 \end{cases}$$

El límite de la función es

$$L = \frac{L^+ + L^-}{2} \quad ; \quad L = \frac{(+1) + (-1)}{2} = 0$$

En el punto de abscisa $x = 0$ la función es discontinua.

Problema. — Por pedidos inferiores a 500 unidades de un producto un mayorista cobra \$ 7 por unidad y por pedidos superiores a 500 unidades cobra \$ 5. ¿Cuánto debe cobrar por 500 unidades?

La función del costo total es

$$\begin{cases} y = f(x) = 7x & 0 \leq x < 500 \\ y = \varphi(x) = 5x & x > 500 \end{cases}$$

El límite para la función total cuando los pedidos tienden a 500 unidades es

$$L = \frac{L^+ + L^-}{2} \quad ; \quad L = \frac{2500 + 3500}{2} = 3000$$

4000
L^- = 3500
L = 3000
L^+ = 2500
1400
1000
y = 7x
y = 5x
0 100 200 500 800

2 DERIVADA

Si se pretende estudiar una función, es útil observar si es positiva o negativa, o bien, si crece o decrece y también la marcha del movimiento, lo que suele llamarse la *fuerza* o la *velocidad de la curva*.

Para tal fin hay que hallar la pendiente de la curva, o sea dividir la diferencia de ordenadas por la diferencia de abscisas, o con otras palabras dividir el incremento de la función por el incremento de la variable. Es decir, se determinará la pendiente, hallando el *cociente incremental* $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

Sea la función continua f (x).

Supongamos que la variable independiente se incrementa en una cantidad $h = \Delta x$, pasando del valor x al valor $(x + h)$. El correspondiente incremento en el valor de la función será, entonces,

$$\Delta y = f(x + h) - f(x)$$

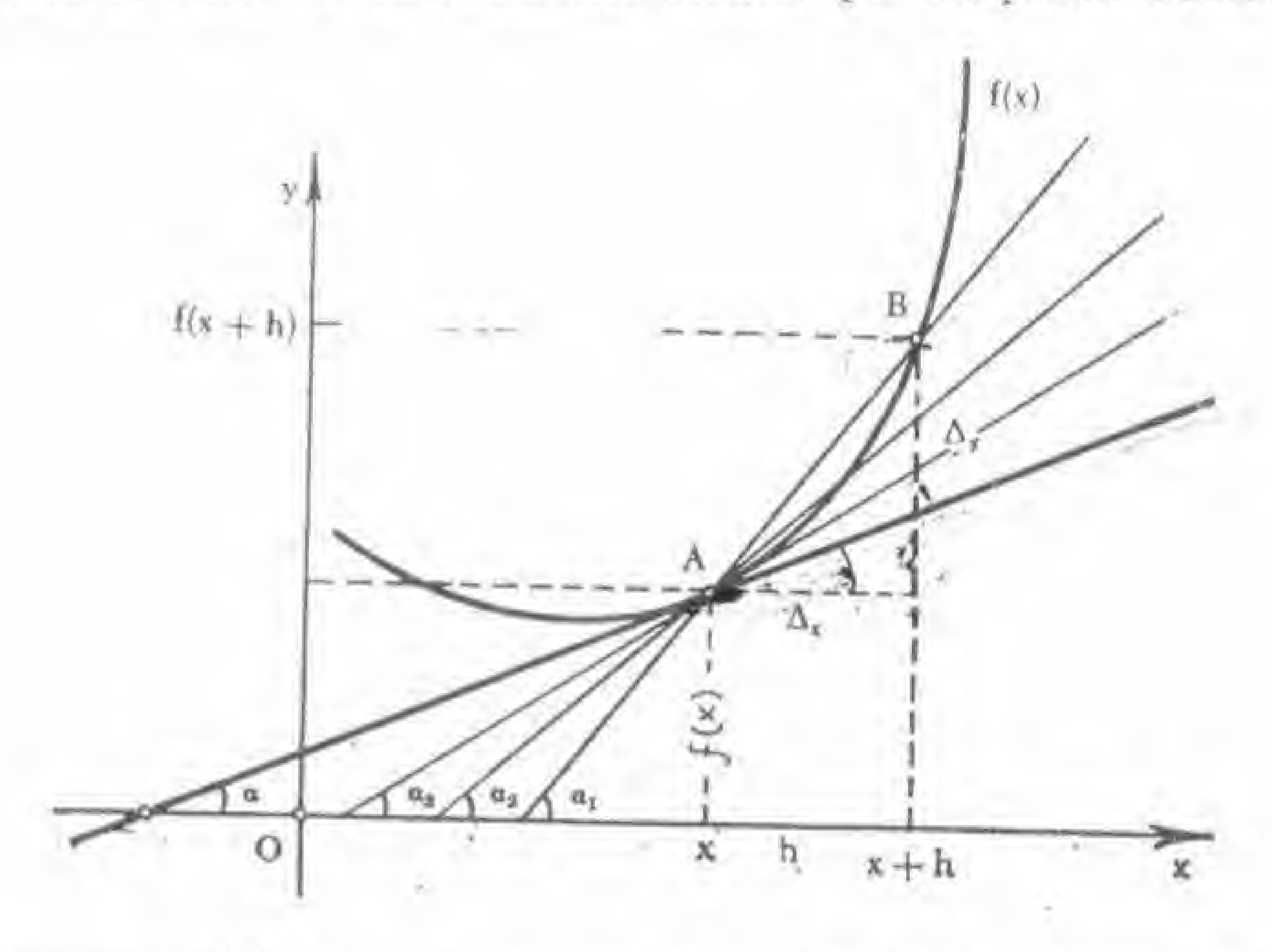
Dividiendo ambos miembros por el incremento de la abscisa, se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Este *cociente incremental* en el punto x es la pendiente

de la recta que une a los puntos A y B por los que pasa la curva y que tienen por abscisas x y $(x + h)$, recta que forma el ángulo α_1 con el eje de las abscisas.

En la curva dibujada en gráfico, la razón incremental será el valor de la pendiente media, que no puede acusar



las sinuosidades de la curva, ya que es la de la recta que pasa por los extremos del intervalo, y en consecuencia se tiene una *idea aproximada* de la función en el intervalo considerado.

Si dividimos en dos el incremento de la variable y para cada uno de los intervalos obtenidos formamos la razón incremental, resultan dos coeficientes que serán los valores de las pendientes de la función en cada uno de dichos intervalos, y, por lo tanto, conoceremos el movimiento de la curva con más detalle que empleando la razón incremental correspondiente al intervalo total.

Si dividimos, ahora, el intervalo primitivo en un número de partes cada vez mayor, y obtenemos las correspondien-

tes razones incrementales, se irá indicando, cada vez con mayor precisión, el verdadero movimiento de la función.

Para borrar toda duda por si existe alguna sinuosidad desconocida entre el punto x y el $(x+h)$ se halla la pendiente instantánea correspondiente a un incremento de la variable más pequeño que cualquier número, lo que se logra por medio del paso al límite. Al *número* resultado se le llama *derivada* en el punto x.

Definición. — *La derivada de una función en un punto es el número que resulta de calcular el límite alcanzado por la razón incremental en ese punto cuando tiende a cero el incremento de la variable.**

Para representar la derivada de una función se utilizan corrientemente diversas notaciones.

La derivada de $y = f(x)$, en el punto x puede ser expresada lo mismo por el símbolo

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que por las notaciones

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica de la derivada.

Desde el punto de vista geométrico, al ir disminuyendo el valor de h las sucesivas razones incrementales para los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valen $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \ldots, \operatorname{tg} \alpha_n$ formándose unas sucesiones de números reales que tienen por límite $(\operatorname{tg} \alpha)$.

Pero el *límite* de estas sucesivas razones incrementales es la derivada, luego

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Vale decir, que *la derivada en un punto es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica forma con el eje de abscisas.*

* No existe derivada en las funciones discontinuas en los puntos de discontinuidad.

De una manera sintética aunque menos rigurosa se puede aceptar que la derivada es la pendiente de la tangente geométrica.

La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a la curva es de mucha utilidad en las aplicaciones de las derivadas, como se verá más tarde en ciertos problemas, tales como los de máximos y mínimos.

VALOR ECONOMICO MARGINAL

La *derivada* se *asimila* al concepto de *valor económico marginal.*

El *ingreso marginal* es un concepto abstracto que sólo tiene sentido matemático cuando el *ingreso* y la *producción varían de una manera continua*; pero puede considerarse como un valor aproximado del *incremento de ingreso que corresponde a un pequeño aumento en la producción desde un determinado nivel de la misma.*

TECNICA DE DERIVACION

Existen múltiples funciones cuyas derivadas se pueden calcular muy fácilmente por medio de la regla general de determinar el cociente incremental y llevarlo al límite; otras presentan dificultades para resolverlas con rapidez por este sistema, pero la solución es más o menos inmediata por métodos indirectos.

Derivada de una constante

Esta función se puede calcular por medio de la regla general de formar el cociente incremental y llevarlo al límite.

Sea

$$y = k$$

Por ser y constante, el incremento de la función es nulo, luego $\Delta y = 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x}$$

luego

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

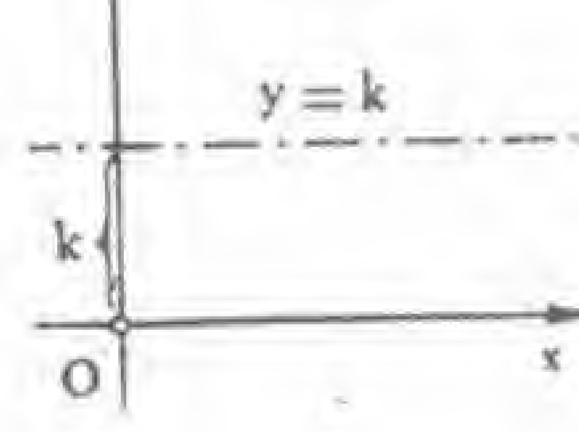
En síntesis, *la derivada de una constante es nula.*

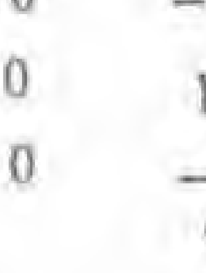
En este caso la gráfica de la función es una recta paralela al eje x a una distancia igual a k y por ser una recta, todas sus tangentes coinciden con ella, luego el ángulo que forman con el semieje positivo de abscisas es igual a cero, de donde

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Ejemplos:

1) Si	$y = 5$	es	$y' = 0$
2) Si	$y = 0\,x + 3$	es	$y' = 0$
3) Si	$y = 3\,(0\,x + 2)$	es	$y' = 0$





Derivada de la variable independiente

Sea

$$y = x$$

La función es igual a la variable independiente, luego

$$\Delta y = y_1 - y_0 = x_1 - x_0 = \Delta x$$

El cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es constantemente igual a uno por lo cual y', *que es su límite, es igual a uno.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

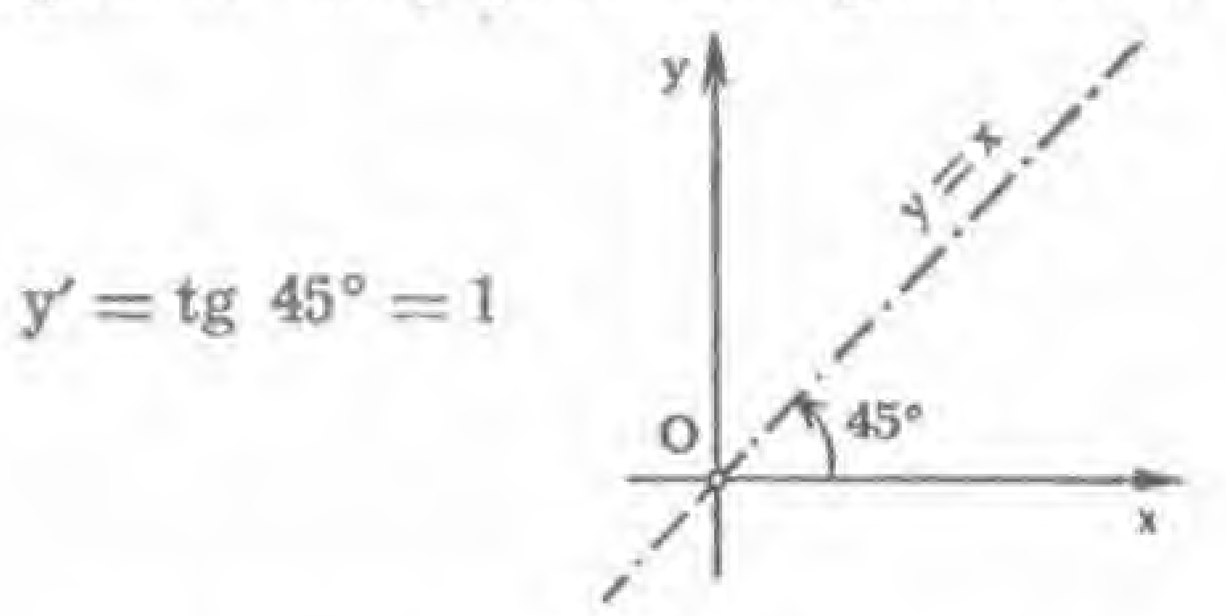
En síntesis, *la derivada de la variable independiente es la unidad.*

La gráfica de la función

$$y = x$$

es la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, con ángulo de 45° y pendiente igual a uno.

$$y' = \operatorname{tg} 45° = 1$$



Caso particular. — Como corolario del artículo anterior, se establece que *la derivada del producto de una constante por la variable independiente es igual a la constante.*

En símbolos:

Si la función es

$$y = k\,x$$

su derivada es

$$y' = k$$

Ejemplos:

1)	$y = 5\,x$	luego	$y' = 5$
2)	$y = 2\,x + 0$	,	$y' = 2$
3)	$y = m\,x$	,,	$y' = m$
4)	$y = x$	,,	$y' = 1$

PRENOCIONES

Número combinatorio. — Se llama *número combinatorio* $(C_{n,\,h})$ de (n) objetos tomados de (h) en (h) a la fracción cuyo numerador es igual al producto de (h) factores consecutivos decrecientes, el primero de los cuales es (n) y cuyo denominador es igual al producto de los (h) primeros números naturales consecutivos decrecientes, el primero de los cuales es (h) y el último 1.

Ejemplos:

1) $C_{4,3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$

2) $C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

3) $C_{6,5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$

En símbolos

$$C_{n,h} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}^{h}}{h(h-1)(h-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Desarrollo de la potencia de un binomio.

Sea

$$(a+b)^5$$

Por definición de potencia

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Se puede obtener directamente el desarrollo de la potencia sin necesidad de efectuar los productos indicados, teniendo en cuenta la siguiente:

Regla de Newton. — La potencia enésima del binomio (a + b) es un polinomio completo, ordenado con respecto a (a) en sentido decreciente y a (b) en sentido creciente que tiene por coeficientes del primero y último términos al número uno, y en los restantes términos al número combinatorio de (n) objetos tomados de uno en uno, dos en dos, tres en tres, etc., o sea al número combinatorio de orden igual al exponente de (b) en ese término.

Con símbolos

$$(a+b)^n = a^n + C_{n,1}\, a^{n-1} b + C_{n,2}\, a^{n-2} b^2 + C_{n,3}\, a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n$$

Desarrollo del ejemplo propuesto

$$(a+b)^5 = a^5 + C_{5,1}\, a^4 b + C_{5,2}\, a^3 b^2 + C_{5,3}\, a^2 b^3 + C_{5,4}\, a b^4 + b^5$$

$$= a^5 + \frac{5}{1} a^4 b + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} a^3 b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^2 b^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a b^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

Derivada de una potencia

Sea la función

$$y = x^m$$

Hallando el cociente incremental, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

Desarrollando el binomio $(x+h)^m$ **según la ley de Newton, resulta**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x^m + m\, x^{m-1} h + C_{m,2}\, x^{m-2} h^2 + \ldots + h^m) - x^m}{h}$$

Reduciendo el primero y último término del numerador y dividiendo cada sumando por *h*, se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\, x^{m-1} + C_{m,2}\, x^{m-2} h + \ldots + h^{m-1}$$

Pasando al límite, $h \to 0$ y, por lo tanto, todos los términos que contienen (h) también tienden a cero, sólo queda $(m\, x^{m-1})$.

Luego la derivada será

$$y' = m\, x^{m-1}$$

En síntesis, *la derivada de una potencia es igual al exponente por la misma potencia con exponente disminuido en una unidad.*

Corolario. — La regla anterior es válida cuando el exponente de la potencia es un número negativo, fraccionario o real.

Ejemplos:

1) $y = x^{-m}$ luego $y' = -m\, x^{-m-1}$

2) $y = x^{-4}$ " $y' = -4\, x^{-5}$

3) $y = x^{\frac{1}{2}}$ " $y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

Ejercicios de aplicación

Hallar la derivada de:

1) $y = x^4$ — R.: $y' = 4x^3$
2) $y = x^a$ — R.: $y' = a x^{a-1}$
3) $y = x^{2a}$ — R.: $y' = 2a x^{2a-1}$
4) $y = x^{m+1}$ — R.: $y' = (m+1)x^m$
5) $y = x^{-3}$ — R.: $y' = -3x^{-4}$
6) $y = x^{-1}$ — R.: $y' = -x^{-2}$
7) $y = x$ — R.: $y' = 1$

8) La ecuación de la recta que pasa por el punto P (x_1, y_1) de la curva $y = f(x)$, y tiene un coeficiente angular (m), es

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Esta recta será la *tangente* a la curva en P si el coeficiente angular (m) es igual a $f'(x_1)$.

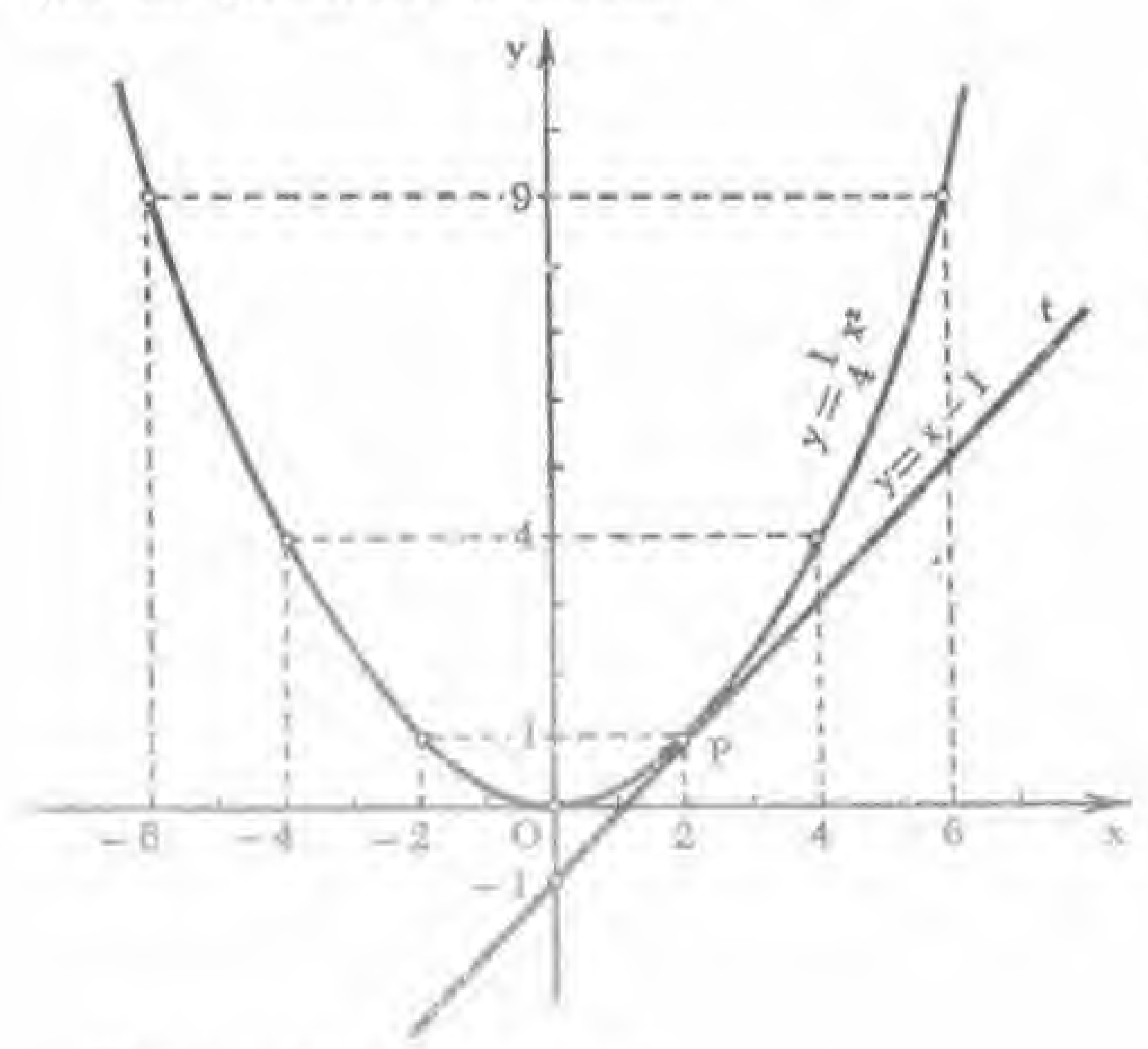
En consecuencia, la ecuación de la tangente buscada será

$$y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)$$

Ejemplo: *Trazar la recta tangente* (t) *a la curva*

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

por un punto de la misma.



Cuadro de valores

x	y
0	0
2	1
4	4
6	9
−2	1
−4	4
−6	9

Cálculo de la Pendiente

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y' = \frac{2}{4}x$$

o bien

$$y' = \frac{1}{2}x$$

y en el punto P (2, 1)

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Luego, la *recta tangente* a la curva en el punto P (2, 1) tendrá por ecuación

$$y - 1 = 1\,(x - 2)$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{y = x - 1}$$

Observaciones:

1º) La derivada en un punto es un *número.*

2º) La curva (x^2) crece según una *razón creciente*, al aumentar (x).

3º) La función derivada, representada por una recta, *crece* según una *razón constante.*

Conclusiones.

De todo lo que antecede se infiere no sólo la magnífica coordinación que existe entre las ciencias puras y las aplicadas, sino también la gran importancia de las derivadas, que al igual que resuelven problemas analíticos con funciones, límites, razones, etc., permiten estudiar problemas técnicos con pendientes, ángulos, tangentes, y aprovechar los cuantiosos recursos del análisis para la solución de las cuestiones técnicas de las ciencias aplicadas.

Derivada de una raiz

Sea la función

$$y = \sqrt[m]{x}$$

o sea

$$y = x^{\frac{1}{m}}$$

por lo tanto, *la derivada de una raíz es un caso particular de la derivada de una potencia.*

Luego

$$y' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1}$$

o bien

$$y' = \frac{1}{m} x^{-\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

Ejercicios de aplicación

Hallar la derivada de:

1) $y = \sqrt{x}$ R.: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

2) $y = \sqrt[3]{x}$. R.: $y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

3) $y = \sqrt[4]{x}$ R.: $y' = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}}$

Derivada del producto de una constante por una función

Sea

$$y = k\, f(x)$$

Siendo *k* una constante, la razón incremental será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\, f(x+h) - k\, f(x)}{h}$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

cuyo límite es

$$y' = k\, f'(x)$$

En síntesis, *la derivada del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función.*

Ejemplos:

1) $y = 3(2x)$ $y' = 3 \cdot 2 = 6$
2) $y = 7x$ $y' = 7 \cdot 1 = 7$
3) $y = 6x^5$ $y' = 6 \cdot 5x^4 = 30x^4$

Derivada de una suma de funciones

Sea

$$y = f(x) = F(x) + \varphi(x) + \ldots + \psi(x)$$

Llamando

$$u, v, \ldots, \omega$$

a las funciones

$$F(x), \varphi(x), \ldots, \psi(x)$$

y denominando

$$\Delta u, \Delta v, \ldots, \Delta\omega$$

a sus respectivos incrementos, se tiene:

$$f(x) = u + v + \ldots + \omega$$

y

$$f(x+h) = u + \Delta u + v + \Delta v \ldots + \omega + \Delta\omega$$

El incremento de la función

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \Delta u + \Delta v + \ldots + \Delta\omega$$

Dividiendo por el incremento del argumento Δx, será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta\omega}{\Delta x}$$

y dado que cada sumando es el cociente incremental de cada una de las funciones $u, v, \ldots, \omega$ y el límite de una

suma es la suma de los límites de los sumandos, tendremos, llevando esta igualdad al límite,

$$y' = u' + v' + \ldots + \omega'$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) + \varphi'(x) + \ldots + \psi'(x)$$

En síntesis, *la derivada de una suma algebraica de funciones es la suma algebraica de las derivadas de cada sumando.*

Ejercicios

Calcular las derivadas de:

1) $y = 4x + 3$ — $y' = 4 + 0 = 4$
2) $y = 2(x + 6)$ — $y' = 2(1 + 0) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$
3) $y = 5(3x + 4)$ — $y' = 15$
4) $y = 6x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ — $y' = 24x^3 - 3x^2 - 6x + 2$
5) $y = x^3 - 7x^2 + 5x + 3$ — $y' = 3x^2 - 14x + 5$
6) $y = x^2 + 3x - 2$ — $y' = 2x + 3$
7) $y = (1 + x)^2$ — $y' = 2(1 + x)$
8) $y = 2 \cdot (1 + x)$ — $y' = 2$
9) $y = x \cdot (x - 1)$ — $y' = 2x - 1$
10) $y = x^4 - n x^2 + C$ — $y' = 4x^3 - 2nx$

Derivada de la función lineal

Sea la función lineal

$$y = mx + k$$

Derivando de acuerdo al artículo anterior, se tiene

$$y' = m$$

es decir, que *su derivada es el coeficiente angular de la función dada.*

Ejemplos:

1) $y = 3x + 4$ — $y' = 3$
2) $y = 7x - 1$ — $y' = 7$
3) $y = ax + b$ — $y' = a$

Observando estos ejemplos se infiere que *las funciones que difieren únicamente en sus términos independientes (constantes) tienen igual derivada.*

Ejemplos:

1) $y = 5x + 4$ — $y' = 5$
2) $y = 5x - 7$ — $y' = 5$
3) $y = 5x + 1$ — $y' = 5$

La observación anterior se debe tener en cuenta al estudiar la operación inversa de la derivación, denominada *integración,* donde el resultado está expresado por una función de x más una constante, que por no estar determinada se representa con la letra C.

Derivada de una función de función

Consideremos el caso en que y no es directamente función de x, sino de otra función u que a su vez lo es de x. Es decir, y *es función de una función de* x.

Por ejemplo:

$$y = \sqrt{3 - x^5}$$

por lo tanto,

$$y = \sqrt{u} \qquad \text{siendo } u = 3 - x^5$$

Vamos a expresar la función de función de la siguiente forma:

$$y = f[\varphi(x)]$$

o sea

$$y = f(u) \qquad \text{siendo} \qquad u = \varphi(x)$$

La derivada de y es el límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, pero introduciremos un artificio: multiplicando y dividiendo por Δu, se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y pasando al límite, como el primer factor es el incremento de y dividido por el de la función u, su límite será la derivada de y con respecto a u, considerada ésta como la *variable independiente*, y el segundo factor tiene por límite la derivada de u con respecto a x.

Luego en símbolos

$$y' = f'(u)\, u' \qquad (1)$$

pero

$$u' = \varphi'(x)$$

Reemplazando en (1), se tiene:

$$\boxed{y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)}$$

Análogo resultado se obtiene si hay otras funciones intermedias.

En síntesis, *la derivada de una función compuesta (función de función) es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones, respecto de la variable de que dependen inmediatamente.*

1) *Resolución del caso anterior:*

Sea

$$y = \sqrt{3 - x^5}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{u} \qquad \text{siendo} \qquad u = 3 - x^5$$

Calculemos las derivadas de estas dos funciones:

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad ; \quad \varphi'(x) = -5x^4$$

de donde

$$y' = -\frac{5x^4}{2\sqrt{u}}$$

o bien

$$y' = -\frac{5x^4}{2\sqrt{3 - x^5}}$$

2) *Calcular la derivada de:*

$$y = (2x + 1)^3$$

Haciendo

$$u = 2x + 1$$

resulta

$$y = u^3$$

Derivando se obtiene

$$u' = 2$$
$$y' = 3u^2$$

por tanto,

$$y' = 3u^2 \cdot 2$$

o bien

$$y' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2$$
$$y' = 6(2x + 1)^2$$

3) *Hallar la derivada de:*

$$y = \sqrt{(3x+2)^3}$$

considerando:

$$y = \sqrt{z} \quad , \quad \text{siendo } z = u^3 \ \text{ y } \ u = 3x + 2$$

es

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad ; \quad z' = 3u^2 \quad ; \quad u' = 3$$

luego

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 3u^2 \cdot 3$$

o bien

$$y' = \frac{9\,(3x+2)}{2\sqrt{3x+2}}$$

Ejercicios de aplicación

Hallar las derivadas de:

1) $y = \sqrt{3-x}$ R.: $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$

2) $y = \dfrac{2}{\sqrt{5+x^3}}$ R.: $y' = -\dfrac{3x^2}{(5+x^3)\sqrt{5+x^3}}$

3) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ R.: $y' = 3\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ R.: $y' = \dfrac{\sqrt{2-x}}{2(2-x)^2}$

5) $y = \sqrt[3]{(3x^2+8x^{-5})}$

R.: $y' = \dfrac{2(6x - 40x^{-6})\sqrt[3]{(3x^2+8x^{-5})^2}}{3(3x^2+8x^{-5})}$

6) $y = (3-2x^4)^5$ R.: $y' = -40x^3(3-2x^4)^4$

7) $y = (x^3+2)\sqrt[3]{x^2-1}$

R.: $y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\,(x^3+2) + 3x^2\sqrt[3]{x^2-1}$

8) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$ R.: $y' = \dfrac{2x(x-1)}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{2x-1}\right)^2} \cdot (2x-1)^2}$

9) $y = \sqrt{x^2-3x+5}$ R.: $y' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$

10) $y = x^2 + \sqrt{x^2-4}$ R.: $y' = x\left[2 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right]$

11) $y = \dfrac{x}{a} - \left(\dfrac{x}{a} + b\right)^2$ R.: $y' = \dfrac{1}{a}\left[1 - 2\left(\dfrac{x}{a} + b\right)\right]$

12) $y = \dfrac{3x}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}}$ R.: $y' = \sqrt[3]{12x}$

13) $y = \sqrt{f(x)}$ R.: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

14) $y = [f(x)]^m$ R.: $y' = m\,[f(x)]^{m-1} \cdot f'(x)$

15) $y = [f(x)]^{-m}$ R.: $y' = -m\,[f(x)]^{-m-1} \cdot f'(x)$

16) $y = (5x^2-3x+4)^2$ R.: $y' = 2(10x-3)(5x^2-3x+4)$

17) $y = \sqrt[n]{f(x)}$ R.: $y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

18) $y = \sqrt[5]{x^3}$ R.: $y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

Derivada del logaritmo neperiano de la variable x

Sea

$$y = \log_e x$$

La razón incremental será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_e (x + h) - \log_e x}{h}$$

pero como la diferencia de logaritmos es igual al logaritmo de un cociente, se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_e \dfrac{x + h}{x}}{n}$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{h} \log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Haciendo

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{n} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{h} = \frac{n}{x}$$

resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x} \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \cdot n \cdot \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y como el logaritmo de una *potencia* es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

pero recordando el valor del número e

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y pasando al límite la expresión (1) resulta

$$(2) \qquad y' = \frac{1}{x} \log_e e \qquad \text{si } \Delta x \to 0 \ ; \ n \to \infty$$

pero sabemos

$$\log_e e = 1$$

por tanto,

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

En síntesis, *la derivada del logaritmo neperiano de* x *es el recíproco de* x.

Derivada del logaritmo decimal de la variable x

Sea

$$y = \log x$$

La demostración es análoga, pero reemplazando ($\log_e$) por (log) (logaritmo decimal) en (2)

$$\boxed{y' = \frac{1}{x} \log e}$$

pero como

$$\log e = \log 2{,}71828\ldots = 0{,}4343 = M$$
$$(\varepsilon < 0{,}0001)$$

resulta, en fin:

$$\boxed{y' = \frac{M}{x}}$$

Siendo M el módulo conocido en la teoría de los logaritmos, y cuyo valor es

$$M = 0{,}4343 \quad (\varepsilon < 0{,}0001)$$

Derivada del logaritmo neperiano de una función

Teniendo en cuenta el artículo relativo a la derivada de función de función se puede obtener la derivada del logaritmo de una función.

Los logaritmos neperianos los representaremos por la característica (ln) en lugar de ($\log_e$), en lo sucesivo.

Sea

$$y = ln\, u \qquad \text{siendo} \qquad u = f(x)$$

La derivada de (ln u) es igual a $\left(\frac{1}{u}\right)$ y llamando (u′) a la derivada de $u = f(x)$

es

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

o bien

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u}}$$

En síntesis, *la derivada del logaritmo neperiano de una función es la derivada de la función dividida por la función.*

EJEMPLO:

Sea la función

$$y = ln\, x^3$$

la derivada será:

$$y' = \frac{3x^2}{x^3}$$

o bien

$$y' = \frac{3}{x}$$

Ejercicios de aplicación

Calcular las derivadas siguientes:

1)	$y = ln\,(3x - 2)$	R.: $y' = \frac{3}{3x-2}$
2)	$y = x\, ln\, x$	R.: $y' = ln\, x + 1$
3)	$y = ln\, x^3$	R.: $y' = \frac{3}{x}$
4)	$y = ln\, \sqrt[3]{x}$	R.: $y' = \frac{1}{3x}$
5)	$y = \log \sqrt[3]{x}$	R.: $y' = \frac{1}{3x} \cdot \log e$
6)	$y = \log_a (x^2 + 4)$	R.: $y' = \frac{2x}{(x^2+4) \cdot ln\, a}$

Método indirecto de derivación

El método que emplearemos para las restantes demostraciones de derivadas, que llamaremos *indirecto*, es el siguiente: Calcularemos los logaritmos neperianos de las funciones y entonces derivaremos. Se obtendrá la derivada de la función dividida por la función, $\frac{y'}{y}$; luego multiplicando por (y), resultará (y′), que es la derivada buscada.

Este método presenta la ventaja de ser general y de aplicación fácil.

Derivada de un producto

Sea

$$y = u \cdot v \cdot w$$

aplicando los logaritmos neperianos, se tiene

$$ln\, y = ln\, u + ln\, v + ln\, w$$

derivando, de acuerdo al artículo anterior,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

Multiplicando por $y = u\, v\, w$, resulta

$$y' = u\, v\, w \left[\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right]$$

efectuando las operaciones indicadas

$$y' = u' v w + u v' w + u v w'$$

Resultado válido para cualquier número de factores

En síntesis: *La derivada de un producto de funciones es igual a la suma de todos los productos que se pueden formar multiplicando la derivada de cada función por las funciones restantes*

EJEMPLOS:

I) Hallar la derivada de

$$y = 3x(2 - 5x)(4x + 8)$$

Haciendo:

$u = 3x$	su derivada es $u' = 3$
$v = 2 - 5x$	„ „ „ $v' = -5$
$w = 4x + 8$	„ „ „ $w' = 4$

Por lo tanto:

$$y' = 3(2 - 5x)(4x + 8) - 5 \cdot 3x(4x + 8) + 4 \cdot 3x(2 - 5x)$$

o bien, efectuando operaciones

$$y' = -180x^2 - 192x + 48$$

II) Sea

$$y = x(x - 3)(7x - 4)$$

haciendo

$u = x$	luego	$u' = 1$
$v = x - 3$	„	$v' = 1$
$w = 7x - 4$	„	$w' = 7$

$$y' = 1(x - 3)(7x - 4) + 1 \cdot x(7x - 4) + 7x(x - 3)$$

$$y' = 21x^2 - 50x + 12$$

Ejercicios de aplicación

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 3x(x - 1)(4 - 2x)$ R.: $y' = -18x^2 + 36x - 12$

2) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ R.: $y' = 3x^2 - 12x + 11$

3) $y = x(-x + 2)(-3x + 5)$ R.: $y' = 9x^2 - 22x + 10$

4) $y = 2x(x - 1)(4x + 5)(3x - 7)$ R.: $y' = 96x^3 - 150x^2 - 88x + 70$

Derivada de un cociente

Sea

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{siendo} \begin{cases} u = f_1(x) \\ v = f_2(x) \end{cases}$$

Aplicando logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln u - \ln v$$

derivando, según el método indirecto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

multiplicando por $y = \dfrac{u}{v}$

$$y' = \frac{u}{v}\left[\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right]$$

o bien

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{u v'}{v^2}$$

y en fin

$$y' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

En síntesis: *La derivada de un cociente es igual a la derivada del dividendo por el divisor menos la derivada del divisor por el dividendo, dividido por el cuadrado del divisor.*

EJEMPLOS:

I) Derivar

$$y = \frac{3x - 2}{x - 5}$$

Haciendo

$u = 3x - 2$ su derivada $u' = 3$

$v = x - 5$ „ „ $v' = 1$

Luego

$$v' = \frac{3 \cdot (x - 5) - (3x - 2) \cdot 1}{(x - 5)^2}$$

$$v' = -\frac{13}{(x - 5)^2}$$

II) Derivar

$$y = \frac{2x\,(3x - 4)}{5\,(x - 1)}$$

Haciendo

$u = 2x\,(3x - 4)$ su derivada $u' = 12x - 8$

$v = 5\,(x - 1)$ „ „ $v' = 5$

Luego

$$y' = \frac{(12x - 8) \cdot 5 \cdot (x - 1) - 2x\,(3x - 4)\,5}{25\,(x - 1)^2}$$

o bien

$$y' = \frac{30x^2 - 60x + 40}{25x^2 - 50x + 25}$$

Ejercicios de aplicación

Hallar la derivada de:

1) $y = \frac{x}{2x - 3}$ R.: $y' = -\frac{3}{(2x - 3)^2}$

2) $y = \frac{5x - 4}{6 - 3x}$ R.: $y' = \frac{18}{(6 - 3x)^2}$

3) $y = \frac{x\,(x - 3)}{4 - 5x}$ R.: $y' = \frac{-5x^2 + 8x - 12}{25x^2 - 40x + 16}$

4) $y = \frac{(x - 1)(x + 2)}{2x + 5}$ R.: $y' = \frac{2x^2 + 10x + 9}{4x^2 + 20x + 25}$

5) $y = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 7}$ R.: $y' = -\frac{28x}{(x^2 - 7)^2}$

Casos particulares. — I) Cuando el dividendo es constante, la derivada del cociente toma una expresión más sencilla.

Sea:

$$y = \frac{k}{v}$$

por ser $k' = 0$, el producto $k' \cdot v = 0$, luego

$$\boxed{y' = -\frac{k\,v'}{v^2}}$$

Sea

$y = \frac{1}{x}$ su derivada $y' = -\frac{1}{x^2}$

Si $y = \frac{1}{x^3}$. $y' = -\frac{3}{x^4}$

II) Cuando el divisor es constante.

Sea:

$$y = \frac{u}{k}$$

Esta función puede ser considerada como

$$y = \frac{1}{k} \cdot u$$

...ya derivada es

$$y' = \frac{1}{k} \cdot u'$$

Si

$$y = \frac{x^2}{3c}$$

es

$$y' = \frac{1}{3c} \cdot 2x \qquad \text{o bien} \qquad y' = \frac{2}{3c} \cdot x$$

III) Reuniendo los casos particulares I y II en una suma algebraica podemos obtener:

Si

$$y = \frac{3x^4}{4a} - \frac{3a^2}{x^2}$$

es

$$y' = \frac{3x^3}{a} + \frac{6a^2}{x^3}$$

Ejercicios de aplicación

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y = \frac{[illegible]}{2 - 5x}$ R.: $y' = \frac{15}{(2 - 5x)^2}$

2) $y = \frac{1}{x - 3}$ R.: $y' = -\frac{1}{(x - 3)^2}$

3) $y = \frac{6 - 4x}{3}$ R.: $y' = -\frac{4}{3}$

4) $y = \frac{5}{3 - x}$ R.: $y' = \frac{5}{(3 - x)^2}$

5) $y = \frac{4}{x(2x - 1)}$ R.: $y' = -\frac{4 \cdot (4x - 1)}{[x(2x - 1)]^2}$

6) $y = \frac{1}{(2x - 3)(4 - 5x)}$ R.: $y' = \frac{20x - 23}{(23x - 10x^2 - 12)^2}$

7) $y = \frac{3(4x - 2)}{5}$ R.: $y' = \frac{12}{5}$

8) $y = \frac{x - 4}{5}$ R.: $y' = \frac{1}{5}$

9) $y = \frac{3}{x}$ R.: $y' = -\frac{3}{x^2}$

10) $y = \frac{2x^2 + 1}{x}$ R.: $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$

11) $y = \frac{x + 1}{1 - 2x}$ R.: $y' = \frac{3}{(1 - 2x)^2}$

12) $y = \frac{x^m}{1 + x^m}$ R.: $y' = \frac{m \cdot x^{m-1}}{(1 + x^m)^2}$

13) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ R.: $y' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

14) $y = \frac{n}{(n^2 + x^2)^3}$ R.: $y' = \frac{-6nx}{(n^2 + x^2)^4}$

15) $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}$ R.: $y' = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{(4x^2 - 4x + 1)^2}$

16) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ R.: $y' = (1 - x)^{-2}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

17) $y = \frac{(1 + x)^2}{1 - (3x)^2}$ R.: $y' = \frac{(18x + 2)(x + 1)}{(1 - 9x^2)^2}$

Derivada de la función potencial

Sea:

$y = u^k$ siendo $u = f(x)$ y (k) constante.

Aplicando los logaritmos neperianos

$$\ln y = k \ln u$$

y derivando según el método indirecto

$$\frac{y'}{y} = k \frac{u'}{u}$$

Si multiplicamos por $y = u^k$, sera:

$$y' = u^k \cdot k \cdot \frac{u'}{u}$$

o bien

$$\boxed{y' = k\, u^{k-1}\, u'}$$

En síntesis: *La derivada de la función potencial es igual al exponente por la potencia disminuida en una unidad por la derivada de la base.*

EJEMPLO:

1) Sea la función potencial

$$y = (3x + 2)^4$$

Haciendo

$u = 3x + 2$ su derivada $u' = 3$

Luego

$$y' = 4\,(3x + 2)^3 \cdot 3$$

o bien

$$y' = 12\,(3x + 2)^3$$

2) $y = (10x^3 - 4)^5 \Rightarrow y' = 150\,x^2\,(10x^3 - 4)^4$

3) $y = (\pi \cdot x)^{-2} \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{\pi^2 \cdot x^3}$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{10x^3 + 2x^6}}$

$$\Rightarrow y' = -\frac{x^2(15 + 6x^3)\sqrt{10x^3 + 2x^6}}{(10x^3 + 2x^6)^2}$$

Caso particular:

Si

$$y = x^k \quad \text{es} \quad y' = k\,x^{k-1} \cdot 1$$

o bien

$$\boxed{y' = k \cdot x^{k-1}}$$

según aprendimos directamente al estudiar la *derivada de una potencia.*

Derivada de la función exponencial

Sea

$$y = a^u$$

siendo (a) constante y $u = f(x)$.

Tomando logaritmos neperianos, se tiene

$$\ln y = u \cdot \ln a$$

Empleando el método indirecto para la derivación y teniendo en cuenta que $(\ln a)$ es una constante, resulta

$$\frac{y'}{y} = u' \ln a$$

Multiplicando por $y = a^u$, se obtiene

$$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

y, finalmente:

$$\boxed{y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$$

En síntesis: *La derivada de la función exponencial es la misma exponencial por el logaritmo neperiano de la base de la potencia por la derivada del exponente.*

CASO PARTICULAR:

Sea

$$y = e^x$$

haciendo

$$u = x \qquad \text{su derivada} \qquad u' = 1$$

se tiene

$$y' = e^x \,.\, \ln e \,.\, 1$$

y como

$$\ln e = 1$$

resulta

$$y' = e^x \ (*)$$

o sea, *la derivada de* (e^x) *es la misma función.*

Derivada de la función potencial-exponencial.

Sea

$$y = u^v$$

siendo (u) y (v) funciones de (x).

Aplicando logaritmos neperianos se obtiene

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

Derivando y teniendo en cuenta que el primer miembro es función de (x) y el segundo miembro es un producto de funciones de la misma variable, resulta

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

Transportando (y) al otro miembro, queda

$$y' = \left[v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right] \cdot y$$

$$y' = \left[v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right] \cdot u^v$$

(*) Esta es una de las varias características notables que explican la importancia del número "e". Nos expresa que la *pendiente* en un punto cualquiera de la curva representativa de (e^x) es equivalente al número de unidades señaladas por su ordenada *y*.

o bien

$$\boxed{y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v}$$

CASO PARTICULAR.

Sea

$$y = u^v$$

donde (u) y (v) son funciones de (x), pero

$$u(x) = v(x) = x$$

resulta

$$y = x^x$$

Aplicando los logaritmos neperianos,

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

Derivando y teniendo en cuenta que el primer miembro es función de x y el segundo es un producto

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln x + 1) \cdot y$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (\ln x + 1) \cdot x^x}$$

Ejercicios

1) *Hallar la derivada de*

$$y = (a + 3)^x$$

Haciendo

$$u = x \qquad \text{es} \qquad u' = 1$$

Por lo tanto:

$$y' = (a + 3)^x \ln (a + 3) \ 1$$

2) *Hallar la derivada de*

$$y = a^{2x+5}$$

Haciendo

$$u = 2x + 5 \qquad \text{es} \qquad u' = 2$$

Por lo tanto:

$$y' = a^{2x+5} \,.\, ln\, a \,.\, 2$$
$$y' = 2\, a^{2x+5} \,.\, ln\, a$$

3) *Hallar la derivada de*

$$y = 2^{\sqrt{x}}$$

Haciendo

$$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{es} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto,

$$y' = 2^{\sqrt{x}} \; \frac{1}{2\sqrt{x}} \; ln\, 2$$

o bien

$$y' = \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot ln\, 2$$

4) *Hallar la derivada de*

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

Haciendo

$$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{es} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

5) *Hallar la derivada de*

$$y = x^{-2x} \cdot ln\, x$$

Téngase en cuenta que x^{-2x} es una *función potencial-exponencial* y que vamos a aplicar primeramente la derivada de un producto.

$$y' = x^{-2x} \cdot \frac{1}{x} + ln\, x \cdot \left[-2\, x^{-2x} \cdot ln\, x - 2\, x \cdot x^{-2x-1}\right]$$

o bien

$$y' = x^{-2x} \cdot \frac{1}{x} + ln\, x \cdot \left[-2\, x^{-2x} \cdot ln\, x - 2\, x^{-2x}\right]$$

El corchete expresa la derivada de la función potencial-exponencial (x^{-2x}).

Efectuando operaciones indicadas

$$y' = x^{-2x-1} - 2\, x^{-2x} \cdot ln\, x - 2\, x^{-2x} \cdot ln^2\, x$$

6) *Hallar la derivada de*

$$y = x^{x^x}$$

Interpretemos el ejercicio como

$$y = x^{(x^x)}$$

Aplicando logaritmos naturales

$$ln\, y = x^x \,.\, ln\, x$$

Derivamos teniendo en cuenta que el primer miembro es una función, el segundo un producto y que la derivada de x^x es $(1 + ln\, x)\, x^x$, resulta

$$\frac{y'}{y} = x^x \cdot (1 + ln\, x) \cdot ln\, x + x^x \cdot \frac{1}{x}$$

Sacando x^x como factor común y pasando y al segundo miembro

$$y' = y \cdot x^x \cdot \left[(1 + ln\, x) \cdot ln\, x + \frac{1}{x} \right]$$

o bien

$$y' = x^{x^x} \cdot x^x \left[ln^2\, x + ln\, x + \frac{1}{x} \right]$$

7) *Hallar la derivada de*

$$y = (\text{sen}\, x)^{\text{sen}\, x}$$

$$ln\, y = \text{sen}\, x \cdot ln\, (\text{sen}\, x)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot ln\, (\text{sen}\, x) + \text{sen}\, x \,.\, \frac{1}{\text{sen}\, x} \cdot \cos x$$

$$y' = (\text{sen}\, x)^{\text{sen}\, x} \cdot \cos x \cdot [ln\, (\text{sen}\, x) + 1]$$

8) $y = x^{2x} \cdot ln\, x$ R.: $y' = 2\, x^{2x} \cdot ln^2\, x + x^{2x-1} + 2\, x^{2x}\, ln\, x + 2\, x^{2x} \cdot ln^2\, x$

Ejercicios de aplicación

Derivar las siguientes funciones:

1) $y = e^{kx}$ R.: $y' = k\, e^{kx}$

2) $y = e^x + e^{5x}$ R.: $y' = e^x + 5\, e^{5x}$

3) $y = e^{7x} + e^{-3x}$ R.: $y' = e^{7x} . 7 + e^{-3x}(-3)$

4) $y = 5\, e^{\frac{1}{x}} - 5\, e^{-4x^2} + \frac{1}{2}\, e^{x^2}$ R. $\begin{cases} y' = 5\, e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) - \\ -5\, e^{-4x^2}(-8\, x) + \frac{1}{2}\, e^{x^2} \cdot 2\, x \\ y' = -\frac{5}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} + 40\, x\, e^{-4x^2} + x\, e^{x^2} \end{cases}$

5) $y = (e^x - e^{-x})^2$ R.: $y' = 2(e^{2x} - e^{-2x})$

6) $y = 10^{x+m}$ R.: $y' = 10^{x+m} . ln\, 10$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Derivada de la función seno:

Sea

$$y = \text{sen}\, x$$

Por el método directo, se tiene:

$$\Delta\, y = \text{sen}\, (x + h) - \text{sen}\, x$$

Pero la diferencia de los senos es igual al doble del producto del coseno de la semisuma de los argumentos por el seno de la semidiferencia.

Luego

$$\Delta\, y = 2 \cos \frac{x + h + x}{2} . \text{sen} \frac{x + h - x}{2}$$

$$\Delta\, y = 2 \cos \frac{2\, x + h}{2}\, \text{sen}\, \frac{h}{2}$$

o bien, como $\Delta\, x = h$

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)\, \text{sen}\, \frac{h}{2}}{h}$$

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)\, \frac{\text{sen}\, \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

pero en el límite cuando $h \to 0$

$$\frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{y' = \cos x}$$

En síntesis: (*La derivada de la función seno es el coseno.*)

Derivada de la función coseno:

Sea

$$y = \cos x$$

Empleando el método directo

$$\Delta y = \cos (x + h) - \cos x$$

Pero el segundo miembro es una diferencia de cosenos, luego al transformarlo en producto, se tiene

$$\Delta y = -2\,\text{sen}\,\frac{x + h + x}{2}\ \text{sen}\,\frac{x + h - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\,\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)\ \text{sen}\,\frac{h}{2}$$

El cociente incremental será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\,\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \text{sen}\,\frac{h}{2}}{h}$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

pero

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

luego

$$\boxed{y' = -\text{sen}\,x}$$

En síntesis. (*La derivada del coseno es menos seno.*)

Derivada de la función tangente:

Sea

$$y = \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$$

Derivando el cociente indicado, se tiene

$$y' = \frac{\cos x\ \text{cox}\ x - (-\text{sen}\,x)\ \text{sen}\,x}{\cos^2 x}$$

o bien

$$y' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \qquad (1)$$

pero como

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$

resulta

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \boxed{y' = \sec^2 x}$$

o bien, de (1)

$$y' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

por lo tanto,

$$\boxed{y' = 1 + \text{tg}^2\,x}$$

Derivada de la función cotangente:

Sea

$$y = \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Derivando el cociente indicado, resulta

$$y' = \frac{\text{sen } x\,(-\text{sen } x) - \cos x \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$y' = -\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \qquad (1)$$

Como el numerador es igual a la unidad, se tiene

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}} \qquad \boxed{y' = -\text{cosec}^2 x}$$

o bien, de (1)

$$y' = -\left[\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}\right]$$

por lo tanto,

$$\boxed{y' = -[1 + \text{cotg}^2 x]}$$

Derivadas de las funciones secante y cosecante:

Sea

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Aplicando la regla para derivar un cociente en el caso que el numerador sea una constante, resulta

$$y' = -\frac{-\text{sen } x}{\cos^2 x}$$

o bien

$$y' = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

y, en fin,

$$\boxed{y' = \text{tg } x \,.\, \sec x}$$

Análogamente se demuestra que si

$$y = \text{cosec } x$$

$$\boxed{y' = -\text{cotg } x \text{ cosec } x}$$

Ejercicios de aplicación

1) *Derivar:*

$$y = \text{sen } x^2$$

Haciendo

$$y = \text{sen } u \quad \text{y} \quad u = x^2$$

resulta que el ejemplo propuesto es una función de función.

Luego

$$y' = \cos u \,.\, u'$$
$$y' = \cos x^2 \,.\, 2x$$

o bien

$$y' = 2x \,.\, \cos x^2$$

2) *Derivar:*

$$y = x \cos x$$

Derivada de producto

$$y' = 1 \,.\, \cos x + (-\text{sen } x)\, x$$
$$y' = \cos x - x \text{ sen } x$$

3) *Derivar:*

$$y = \ln \sqrt{\cos 2x}$$

Haciendo

$$y = \ln z \quad ; \quad z = \sqrt{u} \quad ; \quad u = \cos v \quad ; \quad v = 2x$$

Téngase en cuenta que en la derivada de $\ln z$ se debe considerar a z como *variable independiente* como si dijese d ($\ln x$). Ver artículo: *Derivada de una función de función:*

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\frac{du}{dv} = -\text{sen } v = -\text{sen } 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = 2$$

luego

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \cdot (-\text{sen } 2x) \cdot 2$$

o bien

$$y' = -\frac{2 \text{ sen } 2x}{2 \cos 2x}$$

$$y' = -\text{tg } (2x)$$

4) *Derivar:*

$$y = \ln \text{tg} \frac{x}{2}$$

Haciendo

$y = \ln z$; $z = \text{tg } u$; $u = \frac{x}{2}$

Es

$$y' = \frac{1}{\text{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2 \text{ tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \text{ sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\text{sen } x}$$

5) *Derivar:*

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$$

Haciendo

$v = \ln z$; $z = \sqrt{P}$; $P = \frac{u}{v}$

$u = 1 + \text{sen } x$; $v = 1 - \text{sen } x$

Es

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}} \cdot \frac{\cos x (1 - \text{sen } x) - (-\cos x)(1 + \text{sen } x)}{(1 - \text{sen } x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos x \, [(1 - \text{sen } x) + (1 + \text{sen } x)]}{2 \cdot \frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x} \cdot (1 - \text{sen } x)^2} =$$

$$= \frac{2 \cos x}{2(1 + \text{sen } x)(1 - \text{sen } x)}$$

$$y' = \frac{\cos x}{1^2 - \text{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos x}$$

6) *Derivar:*

$y = \text{sen } 2x \cdot \cos x$
$y' = 2 \cos 2x \cos x + (-\text{sen } x) \text{ sen } 2x$
$y' = 2 \cos 2x \cos x - \text{sen } x \text{ sen } 2x$

7) *Derivar:*

$$y = \ln \text{sen } (a x)$$

Haciendo

$y = \ln z$; $z = \text{sen } u$; $u = a x$

$$y' = \frac{1}{\text{sen } (a x)}$$

$$y' = a \text{ cotg } (a x)$$

8) *Derivar:*

$$y = a^{ax} \text{ sen } b x \qquad (1)$$

Haciendo $u = a^{ax}$ o bien $u = a^{z}$ y $z = a\,x$

es

$$u' = a^{z} \,.\, ln\, a \,.\, a = a \,.\, a^{ax} \,.\, ln\, a$$

Si convenimos que

$$v = \text{sen}\, b\, x$$

es

$$v' = b \cos b\, x$$

Aplicando derivada del producto (1), se tiene:

$$v' = a\, a^{ax}\, ln\, a \,.\, \text{sen}\,(b\,x) + b \cos\,(b\,x)\, a^{ax}$$

9) *Derivar:*

$$y = x^{\text{sen}\, x}$$

Aplicando logaritmos neperianos

$$ln\, y = ln\, x^{\text{sen}\, x}$$

$$ln\, y = \text{sen}\, x\; ln\, x$$

derivando ambos miembros

$$\frac{y'}{y} = \cos x \,.\, ln\, x + \frac{1}{x}\, \text{sen}\, x$$

$$y' = x^{\text{sen}\, x} \,.\, \left(\cos x \,.\, ln\, x + \frac{\text{sen}\, x}{x} \right)$$

10) *Derivar:*

$$y = \sec 4\, x$$

Haciendo $y = \sec z$; $z = 4\, x$

Es

$$y' = 4 \sec 4\, x\; \text{tg}\, 4\, x$$

11) *Derivar:*

$$y = \frac{1}{2}\, \text{sen}^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\, 2\, \text{sen}\, x \cos x$$

$$y' = \text{sen}\, x \cos x$$

12) *Derivar:*

$$f(x) = \text{sen}^2 (\pi - x)$$

Haciendo

$$f(x) = z^2 \quad ; \quad z = \text{sen}\, u \quad ; \quad u = \pi - x$$

Es

$$f'(x) = 2\, \text{sen}\,(\pi - x) \,.\, \cos\,(\pi - x) \,.\, (-1)$$

$$f'(x) = -2\, \text{sen}\,(\pi - x) \cos\,(\pi - x) = \text{sen}\, 2\, x$$

13) *Derivar:*

$$y = \text{sen}\,(a\, x^2)$$

Haciendo

$$y = \text{sen}\, z \quad ; \quad z = a\, x^2$$

$$y' = \cos\,(a\, x^2) \,.\, 2\, a\, x$$

$$y' = 2\, a\, x \cos\,(a\, x^2)$$

14) *Derivar:*

$$s = \text{tg}\,(3\, t)$$

Haciendo

$$s = \text{tg}\, z \quad ; \quad z = 3\, t$$

$$s' = \frac{1}{\cos^2 (3\, t)} \cdot 3$$

$$s' = \frac{3}{\cos^2 (3\, t)}$$

15) $\varrho = \sqrt[3]{\text{tg}\,(3\, \varphi)}$ R.: $\varrho' = \dfrac{1}{\cos^2 (3\, \varphi)\, \sqrt[3]{\text{tg}^2 (3\, \varphi)}}$

16) $y = \text{sen}\, 3\, x$ R.: $y' = 3 \cos\,(3\, x)$

17) $y = \text{sen}\, x \cos x$ R.: $y' = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

18) $y = \dfrac{\text{tg}\, x}{\sec x}$ R.: $y' = \cos x$

19) $y = 2 \cos\,(2\, x)$ R.: $y' = -4\, \text{sen}\,(2\, x)$

20) $y = \text{sen}^3 (2\, x)$ R.: $y' = 6\, \text{sen}^2 (2\, x) \cos\,(2\, x)$

21) $y = \text{cotg}^2 (3\, x - 1)$ R.: $y' = -6\, \text{cotg}\,(3\, x - 1)\, \text{cosec}^2 (3\, x - 1)$

22) $y = \text{tg}\,(4 - 3\, x)^2$ R.: $y' = -6\, (4 - 3\, x) \sec^2 (4 - 3\, x)^2$

23) $y = \dfrac{\text{sen}\, 3\, x}{x^3}$ R.: $y' = \dfrac{3\, x^3 \cos\,(3\, x) - 3\, x^2\, \text{sen}\,(3\, x)}{x^6}$

24) $y = \dfrac{tg^3 x}{x^2}$ R.: $y' = \dfrac{tg^2 x\,[3\,x\,sec^2 x - 2\,tg\,x]}{x^3}$

25) $y = (x - \cos x)\,.\,(x^2 - 1)$ R.: $y' = (1 + \text{sen}\,x)\,(x^2 - 1) + 2\,x - \cos x)$

26) $y = \text{sen}^2\,3\,x + \cos^2 3\,x$ R.: $y' = 0$

27) $y = \dfrac{\text{sen}\,x\,.\,\text{cosec}\,x}{tg\,x\,.\,sec\,x}$ R.: $y' = \cos x\,(-2 - \text{cotg}^2 x)$

28) $y = \dfrac{\text{sen}\,x}{x}$ R.: $y' = \dfrac{x\cos x - \text{sen}\,x}{x^2}$

29) $y = \cos 3\,(x - 2)$ R.: $y' = -3\,\text{sen}\,3\,(x - 2)$

30) $y = sec\,3\,x$ R.: $y' = \dfrac{3\,\text{sen}\,(3\,x)}{\cos^2 (3\,x)}$

31) $y = \dfrac{\text{sen}\,(m\,x)}{\cos\,(m\,x)}$ R.: $y' = m\,sec^2\,(m\,x)$

32) $y = \dfrac{\text{sen}^2\,x}{1 - \text{sen}^2\,x}$ R.: $y' = 2\,tg\,x\,sec^2\,x$

33) $y = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{1 + \cos x}$ R.: $y' = \dfrac{1 + \text{sen}\,x + \cos x}{(1 + \cos x)^2}$

34) $y = \dfrac{\text{sen}^3\,(2\,x)}{\cos^3\,(2\,x)}$ R.: $y' = 6\,tg^2\,(2\,x)\,sec^2\,(2\,x)$

35) $y = \sqrt{\cos 2\,x}$ R.: $y' = -\dfrac{\text{sen}\,(2\,x)}{\sqrt{\cos\,(2\,x)}}$

36) $y = e^{\text{sen}\,x}$ R.: $y' = e^{\text{sen}\,x}\,.\,\cos x$

37) $y = e^{tg\,x}$ R.: $y' = e^{tg\,x}\,[1 + tg^2\,x]$

38) $y = e^{7\,x} + e^{-3\,x} - 2\,e^{\text{sen}\,x}$
R.: $y' = 7\,e^{7x} - 3\,e^{-3x} - 2\,e^{\text{sen}\,x}\cos x$

39) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ R.: $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

40) $y = 3\cdot\log\sqrt[4]{\text{sen}\,x}$ R.: $y' = \dfrac{3}{4}\,\text{cotg}\,x\cdot\log e$

41) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 3\,\text{sen}\,x}}$ R.: $y' = -\dfrac{2\,x - 3\cos x}{\sqrt{(x^2 - 3\,\text{sen}\,x)^3}}$

42) $y = k\cdot\ln tg\,x$ R.: $y' = k\cdot(\text{cotg}\,x + tg\,x)$

43) $y = 3\cdot\sqrt{\text{sen}^3\,x}$ R.: $y' = \dfrac{9}{2}\cdot\cos x\cdot\sqrt{\text{sen}\,x}$

44) $y = \sqrt{x^4 - a^2\,x^2}$ R.: $y' = \dfrac{2\,x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

45) $y = \dfrac{x^2}{e^{2\,x}}$ R.: $y' = \dfrac{2\,x\,(1 - x)}{e^{2x}}$

46) $y = 2^x + x^2$ R.: $y' = 2^x\cdot\ln 2 + 2\,x$

47) $y = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ R.: $y' = \dfrac{3\,x^6 + 3}{x^4}$

48) $y = e^{-t}\cos\,(2\,t)$ R.: $y' = -e^{-t}\,[\cos\,(2\,t) + 2\,\text{sen}\,(2\,t)]$

49) $\rho = a\,\text{cosec}\,(b\,\varphi)$ R.: $\rho' = -a\,b\,\text{cotg}\,(b\,\varphi)\,\text{cosec}\,(b\,\varphi)$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Funciones inversas:

Sea

$$y = x^3 \qquad (1)$$

Asignando valores a (y) se obtiene un conjunto de valores para (x), luego (x) es también función de (y), que, evidentemente, no sigue la misma ley, sino la *ley inversa;* por este motivo se llama *función inversa.*

La función inversa de (1) es

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Análogamente,

si $y = \log x$ es $x = \text{antilog}\, y$

si $y = \frac{4}{x}$ es $x = \frac{4}{y}$

Funciones circulares inversas

Existen funciones en las que el **arco** es la **función**, siendo el seno, el coseno, la tangente, etc., el **argumento** o variable independiente.

Estas funciones se llaman **inversas**.

Así por ejemplo, considerando la **función inversa**

$$y = \text{arc sen } x$$

que se lee "y es un arco cuyo seno vale x", la **función directa** es

$$x = \text{sen } y$$

Análogamente

$$y = \text{arc tg } x \qquad \text{(inversa)}$$
$$\Rightarrow \quad x = \text{tg } y \qquad \text{(directa)}$$

Derivada de la función inversa:

Sea $y = f(x)$ una función continua.

Su función *inversa* la simbolizamos así:

$$x = \varphi(y)$$

Si esta función es *continua*, se puede calcular su derivada, luego

$$\varphi'(y) = \text{lím.} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \text{lím.} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

pero $\Delta x \to 0$ por ser continua la función dada y por lo tanto $\Delta y \to 0$, luego

$$\boxed{\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

En síntesis: *La derivada de la función inversa es la recíproca de la derivada de la función directa.*

a) Sea $x = \sqrt[3]{y}$

Su función *inversa* es $y = x^3$.

Derivando, se tiene $y' = 3x^2$

luego

$$x' = \frac{1}{3x^2} \quad \text{o bien} \quad x' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

b) Sea $y = \text{arc sen } x$

Su función directa será:

$$x = \text{sen } y \qquad (1)$$

Derivando $x' = \cos y$

luego

$$y' = \frac{1}{\cos y} \qquad (2)$$

pero como $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$

resulta que $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

reemplazando en (2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}}$$

pero $\text{sen } y = x$

luego

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\text{Si } y = \text{arc sen } x \quad \text{es } y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad \text{(I)}$$

Si la variable $x = \varphi(u)$, es decir, es función compuesta, la fórmula (I) se transforma en

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \text{(II)}$$

c) Sea la función *inversa*

$$y = \text{arc}\cos x$$

Su función *directa* será:

$$x = \cos y$$

Derivando

$$x' = -\,\text{sen}\, y$$

luego

$$y' = -\frac{1}{\text{sen}\, y}$$

o bien

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

y, en fin,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resumiendo:

Si

$$y = \text{arc}\cos x$$

es

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(III)}$$

Si $x = \varphi(u)$, resulta $y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (IV)

d) Sea

$$y = \text{arc tg}\, x$$

Su función directa:

$$x = \text{tg}\, y$$

Derivando

$$x' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y$$

luego

$$y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y}$$

o bien

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{(V)}$$

Si $y = \text{arc tg}\, u$, la fórmula (V) se transforma en

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2} \qquad \text{(VI)}$$

Ejercicios de aplicación

Derivar las siguientes funciones:

1) $y = \text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}$ R.: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2) $y = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ R.: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = \text{arc tg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$ R.: $y' = \dfrac{2}{1 + x^2}$

4) $y = \text{arc cos} \dfrac{x}{a}$ R.: $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

5) $y = \text{arc cos} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ R.: $y' = -\dfrac{2n x^{n-1}}{x^{2n} + 1}$

6) $y = \text{arc tg} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}}$ R.: $y' = \dfrac{1}{2}$

7) $y = \text{arc cotg } x$ R.: $y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

8) $y = \text{arc sec } x$ R.: $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

9) $y = \text{arc cosec } x$ R.: $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

10) $y = e^x$ R.: $y' = e^x$

11) $y = \text{arc tg} \dfrac{x}{4}$

Téngase en cuenta la fórmula (VI) del artículo anterior.

R.: $y' = \dfrac{1}{4\left(1 + \dfrac{x^2}{16}\right)}$

12) $y = 16^{\ln x + \log x}$ R.: $y' = 16^{\ln x + \log x} \cdot \ln 16 \cdot \left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4} \cdot \log e \cdot 4x^3\right]$

13) $y = (\text{sen } x + 3 \cos x)^3$ R.: $y' = 3 (\text{sen } x + 3 \cos x)^2 \cdot (\cos x - 3 \text{ sen } x)$

14) $y = \text{arc sen } e^x$ R.: $y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}$

15) $y = \text{arc sen} \sqrt{x}$ R.: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

16) $y = \text{arc tg } (x \cdot \text{sen } x)$ R.: $y' = \dfrac{\text{sen } x + x \cdot \cos x}{1 + (x \cdot \text{sen } x)^2}$

Algunos significados físicos de la derivada.

La *velocidad* es el camino dividido por el tiempo, pero esa es la velocidad media.

Expresamos esta ley por la siguiente función:

$$y = f(t)$$

en donde y representa el camino recorrido por el móvil y (t) el tiempo que tarda en recorrerlo.

Se llama *velocidad instantánea* en el momento t a la expresión

$$v = \text{lím} \frac{\Delta y}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \to 0$$

o sea, la velocidad instantánea es la derivada del camino respecto del tiempo

$$v = f'(t)$$

La *aceleración* es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Notación

$$a = \text{lím} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

cuando $\Delta t \to 0$

La expresión del movimiento de un móvil que cae es la siguiente:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

su derivada es

$$y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = g t$$

luego

$$v = g t \qquad \text{por (1)}$$

es decir, la *velocidad es igual a la aceleración de la gravedad* (g) *por el tiempo* (t).

A su vez, como la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, resulta

$$a = v' = \frac{d}{dt} (g t)$$

$$dt \to 0$$

luego

$$a = g$$

donde se observa que la *aceleración es constante* cuando el movimiento está dado por la expresión anterior.

La *dilatación* es el cociente entre un incremento de longitud y un incremento de temperatura. La dilatación instantánea, correspondiente a la temperatura (t), no es más que la derivada de la longitud de una barra con respecto a la temperatura.

Análogamente, el peso específico, el tanto de interés, la carga específica, la velocidad de reacción, resultan de la definición de función derivada.

Esto importa decir que toda cuestión en que aparece un cociente de incrementos descubre una derivada.

La función *derivada* es un aporte significativo de la matemática a la ciencia física.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS DERIVADAS PARCIALES

En los artículos anteriores se han estudiado los cálculos de derivación para las funciones *explícitas:*

$$y = f (x)$$

Ahora, consideremos las funciones implícitas para su derivación.

En las funciones *implícitas* no se hallan explicitadas las operaciones a realizar con el argumento (x) para obtener la función (y).

Notación de la función implícita:

$$f (x, y) = 0$$

Ejemplo:

$$y^3 - 2x + 5 = 0 \qquad \text{(I)}$$

es una función implícita, equivalente a la explícita

$$y = \sqrt[3]{2x - 5}. \qquad \text{(II)}$$

En este caso, para hallar la derivada de la función (I) basta calcular la derivada de la expresión (II). Pero existen casos en los que resulta difícil despejar (y) y, por lo tanto, será menester encontrar un método para calcular directamente una función implícita sin necesidad de transformarla previamente a la forma explícita.

Sea la función:

$$f (x ; y) = 0$$

Supongamos que

$$z = f (x ; y)$$

por lo tanto,

$$z + \Delta z = f (x + \Delta x ; y + \Delta y)$$

$$\Rightarrow \Delta z = f (x + \Delta x ; y + \Delta y) - f (x ; y)$$

Sumando y restando convenientemente $f(x; y + \Delta y)$

$$\Delta z = [f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)] + \\ + [f(x; y + \Delta y) - f(x; y)]$$

Dividiendo por Δx

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)}{\Delta x} + \\ + \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

Multiplicando el 2º término del 2º miembro por $\frac{\Delta y}{\Delta y}$, y ordenando los denominadores, se tiene:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{[f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)]}{\Delta x} + \\ + \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pasando al límite

$$z' = \text{lím} \left[\frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)}{\Delta x} \right] + \\ + \text{lím} \left[\frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

Derivada parcial.

En la relación del primer corchete, se supone que $(y + \Delta y)$ es *constante* y, en consecuencia, en el límite se obtiene la *derivada* de la función (f) con respecto a la variable (x) solamente, lo que se simboliza $\frac{\delta f}{\delta x}$ y que se lee *derivada parcial* de (f) con respecto a (x).

Análogamente, se supone que (x) es constante en el segundo corchete y se obtiene, pasando al límite, la derivada parcial de (f) con respecto a (y), cuya notación es $\frac{\delta f}{\delta y}$:

En consecuencia, por (1)

$$z' = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Pero como de acuerdo a lo supuesto es

$$z = 0 \qquad \text{será} \qquad z' = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

o bien

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\delta f}{\delta x}}{\dfrac{\delta f}{\delta y}}}$$

Esta fórmula permite calcular directamente la derivada de una *función implícita.*

I) Sea la ecuación

$$x^2 + y^2 - x^2 y^2 = 0 \qquad \text{(función implícita)}$$

será

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x - 2xy^2 \quad (\text{se supone } y \text{ constante})$$

y también

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2y - 2x^2 y \quad (\text{se supone } x \text{ constante})$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2xy^2}{2y - 2x^2 y}$$

II) Sea

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 2y = 2xy$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2\cos 2x - 2y = 2[\cos 2x - y]$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -2\operatorname{sen} 2y - 2x = -2[\operatorname{sen} 2y + x]$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2[\cos 2x - y]}{-2[\operatorname{sen} 2y + x]}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2x - y}{\operatorname{sen} 2y + x}$$

LA DERIVADA TOTAL. — En el caso que las variables independientes x e y estén relacionadas con una tercera variable (z) *la derivada total* se obtiene como suma de derivadas parciales (*).

Sea

$$z = f(x, y)$$

la derivada total es

$$z' = \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta y}$$

Ejercicios de aplicación

Derivar:

1) $4x^3 - 5xy + 2x^2 - 3y^2 = 0$

R.: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^2 - 5y + 4x}{5x + 6y}$

2) $4x^2 - 9y^2 = 36$

R.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{9y}$

(*) Las *derivadas parciales* expresan la variación de $f(x, y) = 0$ debido a una variación de la (x), permaneciendo la (y) constante, o viceversa. La *derivada total* nos dará una aproximación lineal de la variación de $z = f(x, y)$ motivada por una variación de ambas variables: la x y la y.

3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

R.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2}{x^2}$

4) $e^x \operatorname{sen} y = e^{-y} \cos x$

R.: $y' = -\dfrac{e^x \operatorname{sen} y + e^{-y} \operatorname{sen} x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$

5) $x \ln y + y \ln x = 1$

R.: $y' = -\dfrac{y[y + x \ln y]}{x[x + y \ln x]}$

6) $r^2 = y^2 + x^2$

R.: $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ R.: $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

8) $4x^2 y + 2y^3 - 1 - x^2 y^2 = 0$ R.: $y' = \dfrac{2xy^2 - 8xy}{4x^2 + 6y^2 - 2x^2 y}$

9) $x^3 + xy - 12 = 0$ R.: $y' = \dfrac{3x^2 + y}{x}$

Calcular la derivada total

1) $z = x^2 + y^2 - 3x + 4y - 5$

R.: $z' = (2x - 3) + (2y + 4)$

2) $z = x^y$

R.: $z' = y\, x^{y-1} + x^y \ln x$

3) $z = 2ax^2 + 3bxy + 4cy^3$

R.: $z' = (4ax + 3by) + (3bx + 12cy^2)$

4) $u = x \cdot y^2 \cdot z^3$

R.: $u' = y^2 z^3 + 2xyz^3 + 3xy^2z^2$

5) $u = \ln(x^2 + y^2)$

R.: $u' = \dfrac{2(x + y)}{x^2 + y^2}$

DERIVADAS SUCESIVAS

La derivada de la función f (x) es otra función que simbolizamos por f' (x); esta otra función es generalmente derivable y su derivada es otra función de x que se designa f'' (x) y se llama *derivada segunda* de f (x), y así sucesivamente.

La derivada enésima de f (x) se designa por $f^{(n)}(x)$, entendiéndose que (n) no es un exponente sino un índice.

Hallar las derivadas sucesivas de

I) $y = 5x^3$

$y' = 15x^2$; $y'' = 30x$; $y''' = 30$; $y^{IV} = 0$

II) $y = 2x^3 - x^2 + 5$

$y' = 6x^2 - 2x$

$y'' = 12x - 2$

$y''' = 12$

$y^{IV} = 0$

III) $y = \cos x$

$y' = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $y'' = -\cos x$

$y''' = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $y^{IV} = \cos x$

IV) $y = e^x$

$y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y''' = e^x$; . . . . .

Observaciones:

1) En general, la función $y = x^n$ tiene (n) derivadas no nulas, siendo la última igual a n! (factorial de n).

2) Las sucesivas derivadas de (e^x) son todas iguales a (e^x).

Calculo la derivada enésima.

V) $y = \cos h x$ $\qquad$ R.: $h^n . \cos \left[h x + n \frac{\pi}{2} \right]$

VI) $y = \operatorname{sen} h x$ $\qquad$ R.: $h^n . \operatorname{sen} \left[h x + n \frac{\pi}{2} \right]$

VII) $y = \ln x$ $\qquad$ R.: $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

VIII) $y = e^{mx}$ $\qquad$ R.: $m^n . e^{mx}$

IX) $y = \frac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ R.: $2\,n!\,(1-x)^{-(n+1)}$

X) Calcular las derivadas parciales de

a) $f = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

R.: $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2) \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2) \\ \frac{\delta f}{\delta z} = 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$

b) $f = e^{xyz} = 0$

R.: $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = e^{xyz} . y . z \\ \frac{\delta f}{\delta y} = e^{xyz} . x . z \\ \frac{\delta f}{\delta z} = e^{xyz} \cdot x \cdot y \end{cases}$

c) $f = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 = 0$

R.:
$$\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x} = 81x^2 - 108xy + 36y^2 \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} = -54x^2 + 72xy - 24y^2 \end{cases}$$

d) $f = ln\ \text{tg}\,\dfrac{x}{y} = 0$

R.:
$$\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x} = \dfrac{1}{y\,.\,\text{sen}\,\dfrac{x}{y}\,.\,\cos\dfrac{x}{y}} \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} = -\dfrac{x}{y^2\,.\,\text{sen}\,\dfrac{x}{y}\,.\,\cos\dfrac{x}{y}} \end{cases}$$

e) $f = \text{ar tg}\,\dfrac{2x + y - x^2y}{4 - 2xy - x^2} = 0$

R.:
$$\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x} = \dfrac{2}{1 + x^2} \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} = \dfrac{1}{1 + y^2} \end{cases}$$

Problema. — *Hallar la productividad marginal* de la mano de obra (M.O.) y de la Automatización (A) según los valores que se asignen a (x) y a (y).

La función producción es

$$P = 30xy^2 + 2x + 10y = xy$$

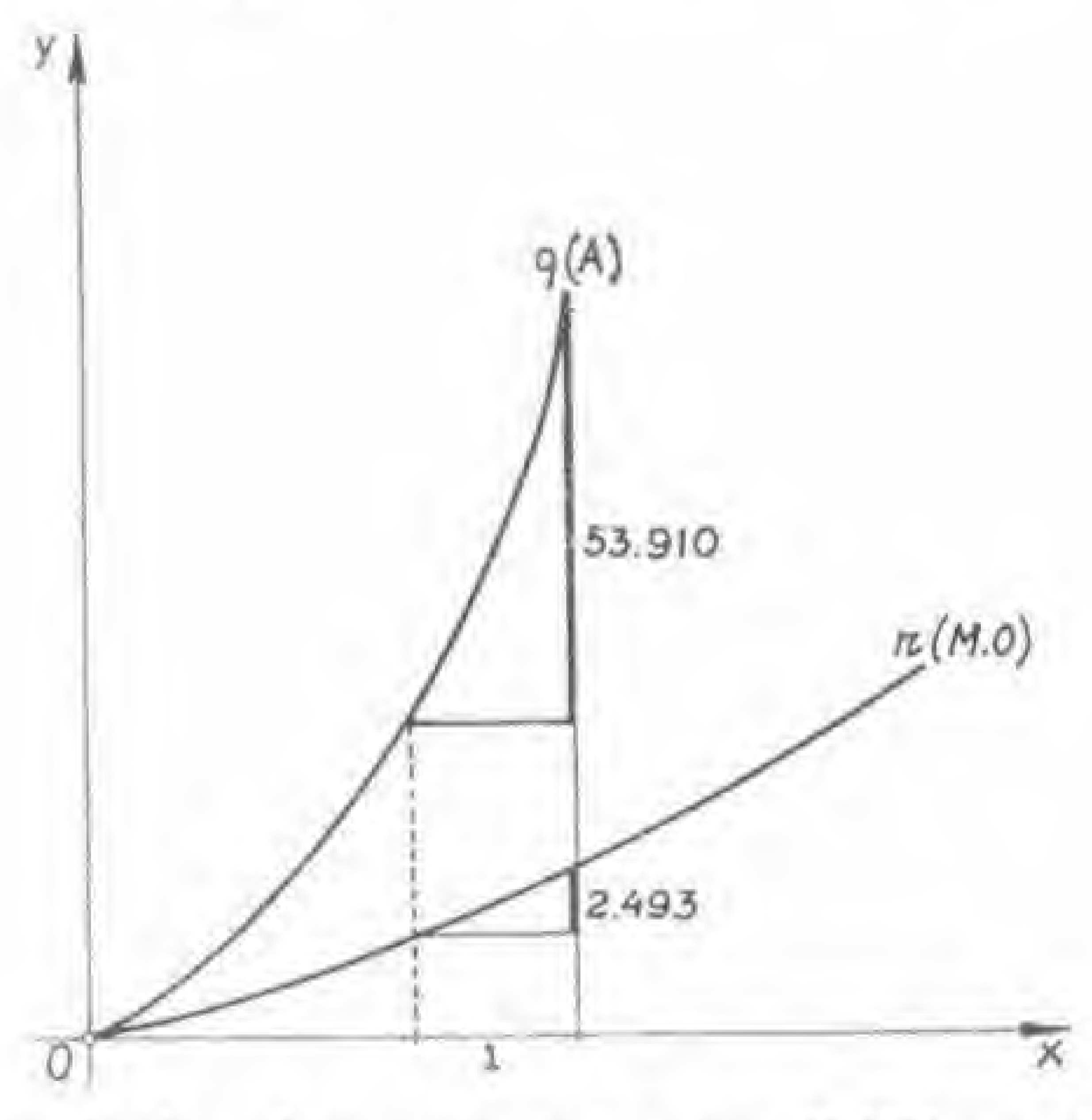
$$r\ (M.O.) = \frac{\delta P}{\delta x} = 30y^2 + 2 - y$$

$$q\ (A) = \frac{\delta P}{\delta y} = 60xy + 10 - x$$

Si $\begin{cases} x = 100 \\ y = 9 \end{cases}$

Resulta:

$$r = \frac{\delta f}{\delta x} = 30 \cdot 9^2 + 2 - 9 = 2\,423$$



o sea *por cada hombre* que se agrega 2 423 es el *aumento de productividad*

$$q = \frac{\delta f}{\delta y} = 60 \cdot 100 \cdot 9 + 10 - 100 = 53\,910$$

señala que *por cada hora* de automatización 53 910 *es el aumento.* Conviene invertir en automatización, siempre y cuando los costos sean convenientes.

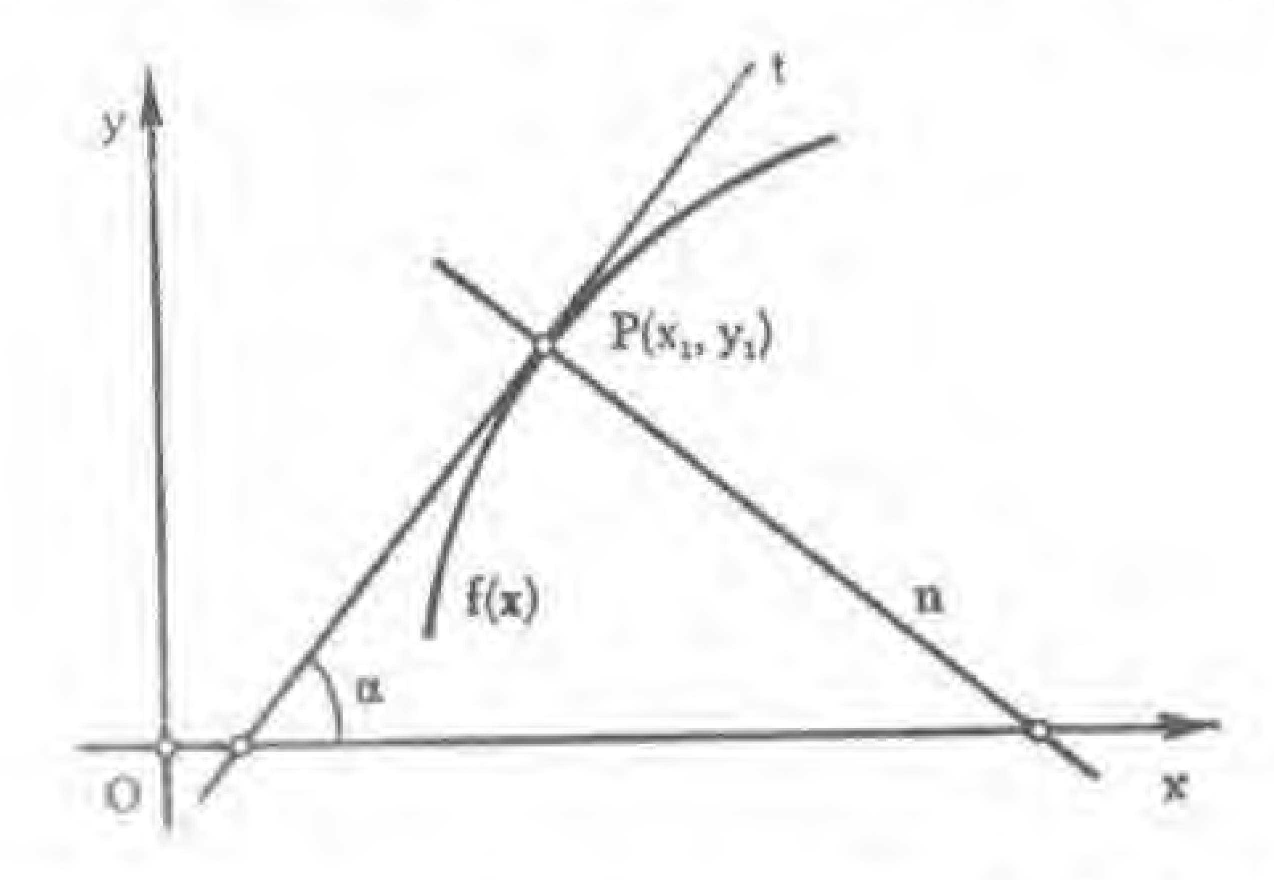
3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecuaciones de la tangente y de la normal

Ecuación de la tangente. — Sea una curva plana

$$y = f(x)$$

y P un punto de la curva de coordenadas $(x_1 ; y_1)$.



La *ecuación de la recta* que pasa por un punto $P(x_1 ; y_1)$ es

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

pero el *coeficiente angular*

$$m = f'(x) = \frac{dv}{dx}$$

luego la *ecuación de la tangente* pedida será

$$\boxed{y - y_1 = f'(x)\,(x - x_1)} \qquad \textbf{(I)}$$

Ecuación de la normal. — La ecuación de la *normal* a una curva en un punto (P) se obtiene teniendo en cuenta que la normal es perpendicular a la tangente y, por lo tanto, su coeficiente angular cumple la condición

$$m_1 = -\frac{1}{m} \quad \text{o bien} \quad f'_1(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Por lo tanto, reemplazando en (I), resulta

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{f'(x)} \cdot (x - x_1)}$$

que es la ecuación de la *recta normal* a la curva en el punto P

EJEMPLOS:

I) *Determinar la ecuación de la tangente a la parábola*

$$y = 2\,x^2$$

en el punto de abscisa $x_1 = 2$

$$y' = 4\,x$$

o bien

$$y' = 4 \,.\, 2 = 8$$

además,

$$y_1 = 2 \,.\, 2^2 = 8$$

luego, la ecuación de la tangente es

$$y - 8 = 8\,(x - 2)$$
$$y = 8\,x - 8$$

II) *Determinar la ecuación de la normal a la parábola*

$$y = x^2$$

en el punto P (2, 4)

Siendo

$$y' = 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

la ecuación de la normal será

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

o bien

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

III) *Determinar la ecuación de la tangente a la elipse:*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

en el punto (4; 2,4)

Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2x}{25}}{\frac{2y}{16}} = -\frac{16x}{25y}$$

En el punto (4; 2,4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16 \cdot 4}{25 \cdot 2,4} = -\frac{16}{15}$$

Ecuación de la tangente

$$y - 2,4 = -\frac{16}{15}(x - 4)$$

IV) *Determinar la ecuación de la normal del ejercicio anterior.*

$$\text{R.: } y - 2,4 = \frac{15}{16}(x - 4)$$

V) *Determinar la ecuación de la tangente a la curva de ecuación*

$$x^3 - x y^2 + y^2 = 0$$

en el punto $(2, \sqrt{8})$

$$\text{R.: } 20x + 6\sqrt{8}\,y = 88$$

VI) *Determinar las ecuaciones de la recta tangente* (t) *y de la normal* (n) *de la parábola*

$$y = x^2 - x + 1$$

en el punto de abscisa $x = 2$.

$$\text{R.: } t: 3x - y = 3$$
$$n: x + 3y = 11$$

VII) *Determinar la ecuación de la tangente al círculo*

$$x^2 + y^2 = a^2$$

en el punto (x_1, y_1).

$$\text{R.: } x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = a^2$$

VIII) *Dada la función*

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

a) determinar la ecuación de la recta tangente en el punto (3, 4);

b) graficar la curva y la recta tangente.

$$\text{R.: a) } y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

IX) *Determinar la ecuación de la tangente a la hipérbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_1, y_1).

$$\text{R.: } \frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$$

X) *Dada la función*

$$y = x^2 + 4x$$

a) determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (1, 5);

b) graficar la curva y la recta tangente.

$$\text{R.: a) } y = 6x - 1$$

XI) *Calcular la ecuación de la tangente a la curva*

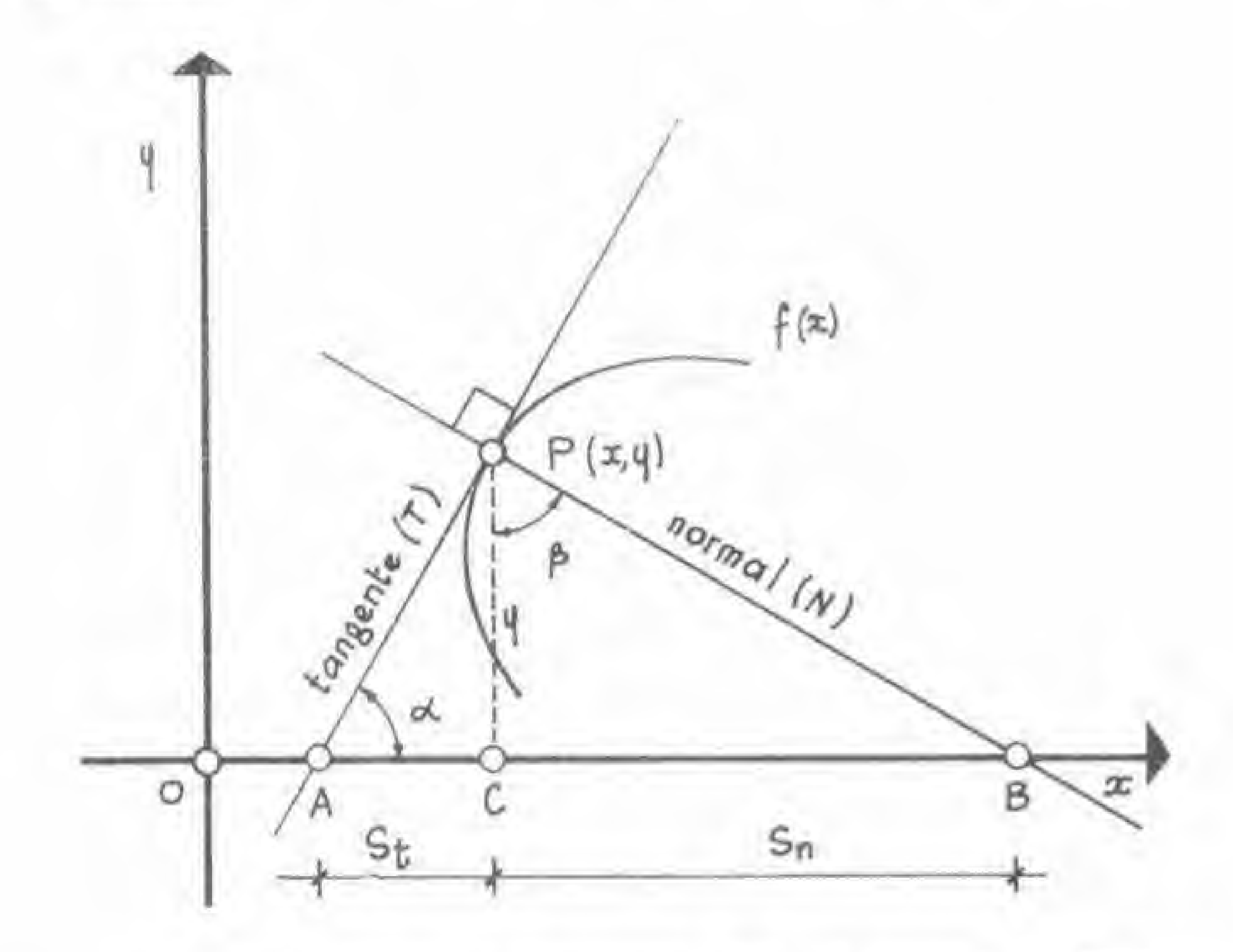
$$y = 3 - x^3$$

en el punto de la misma de abscisa $x_1 = 1$.

$$\text{R.: } y = -3x + 5$$

Longitudes del segmento tangente, del segmento normal de la subtangente y de la subnormal

Sea una curva de ecuación $y = f(x)$ y un punto P de la misma.



Se llama *segmento tangente* (T) al segmento $\overline{AP}$ de la tangente, comprendido entre el punto P de contacto y el eje x. Se llama *segmento normal* (N) al segmento PB de la normal determinado por el punto dado P y el eje de las equis; se denomina *subtangente* (S_t) a la proyección del segmento tangente sobre el eje de abscisas, o sea

$$S_t = \overline{AC}$$

Se denomina subnormal (S_N) a la proyección del segmento normal sobre el eje x, es decir,

$$S_N = \overline{CB}$$

Determinación de la expresión analítica de (T), (N), (S_t) y (S_N).

Subtangente. — Considerando el triángulo rectángulo PCA, se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{S_t} \quad \Rightarrow \quad S_t = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}$$

y como

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

resulta

$$\boxed{S_t = \frac{y}{y'}}$$

Subnormal. — Del triángulo rectángulo PCB, se tiene

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{S_n}{y} \quad \Rightarrow \quad S_n = y \cdot \operatorname{tg} \beta$$

como

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = y'$$

resulta

$$\boxed{S_n = y\, y'}$$

Tangente. — Considerando el $\overset{\triangle}{PCA}$ rectángulo, se tiene

$$T = \sqrt{y^2 + S_t^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = \sqrt{\frac{y^2 y'^2 + y^2}{y'^2}}$$

o bien

$$T = \frac{\sqrt{y^2 [y'^2 + 1]}}{y'}$$

por lo tanto,

$$T = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}$$

Normal. — Aplicando el teorema de Pitágoras en el $\overset{\triangle}{PCB}$

$$N = \sqrt{y^2 + S_n^2} = \sqrt{y^2 + (y\,y')^2} = \sqrt{y^2[1 + y'^2]}$$

por lo tanto

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}$$

Ejercicios

I) ***En la parábola***

$$y = 2x^2 - 3x$$

determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, la longitud de la subtangente, de la subnormal, de la tangente y de la normal, en el punto

$$x = 2$$

Ecuación de la tangente

$$y = 2 \,.\, 2^2 - 3 \,.\, 2 = 2$$

$$y' = 4x - 3$$

para $x = 2$

$$y' = 5$$

luego

$$y - 2 = 5\,(x - 2)$$

por lo tanto, la ecuación buscada es

$$5x - y = 8$$

Ecuación de la normal

$$y - 2 = -\frac{1}{5}\,(x - 2)$$

o bien

$$5y + x = 12$$

Subnormal (S_N)

$$S_N = y\,y'$$

$$S_N = 2 \,.\, 5 = 10$$

Subtangente (S_T)

$$S_T = \frac{y}{y'}$$

$$S_T = \frac{2}{5}$$

Tangente (T)

$$T = \frac{y}{y'}\;\sqrt{1 + y'^2}$$

$$T = \frac{2}{5}\;\sqrt{1 + 25}$$

$$T = 2,04$$

Normal (N)

$$N = y\sqrt{1+y'^2}$$

$$N = 2\sqrt{1+25} = 2 \times 5.1$$

$$\boxed{N = 10,2}$$

II) *Determinar las ecuaciones de las rectas tangente* (t) *y normal* (n), *longitud de la* (S_t), (S_N), *de la* (T) *y de la* (N) *de la parábola cúbica*

$$y = x^3$$

en el punto

$$x = -1$$

$$\text{R.: } t: 3x - y = -2$$
$$n: x + 3y = -4$$

$$S_t: -\frac{1}{3} \; ; \; S_N: -3 \quad ; \quad T: -1,05 \quad ; \quad N: -3,16$$

III) *Determinar las longitudes de los elementos:* (S_N), (S_t), (T) *y* (N) *correspondientes a la parábola*

$$y = x^2 - 4x + 3$$

para el punto

$$x = 4$$

$$\text{R.: } S_{(N)} = 12$$

$$S_t = \frac{3}{4}$$

$$T = \frac{3}{4}\sqrt{17}$$

$$N = 3\sqrt{17}$$

IV) *Hallar las longitudes de la subtangente y de la subnormal de la curva*

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad \text{(lemniscata)}$$

Téngase en cuenta que

$$2\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -2a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}$$

$$\text{R.: } S_t = -\frac{\rho^3}{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}$$

$$S_N = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}$$

Ángulo de dos curvas

Recordemos la fórmula que expresa la tangente del ángulo (α) determinado por dos rectas que se cortan

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1}$$

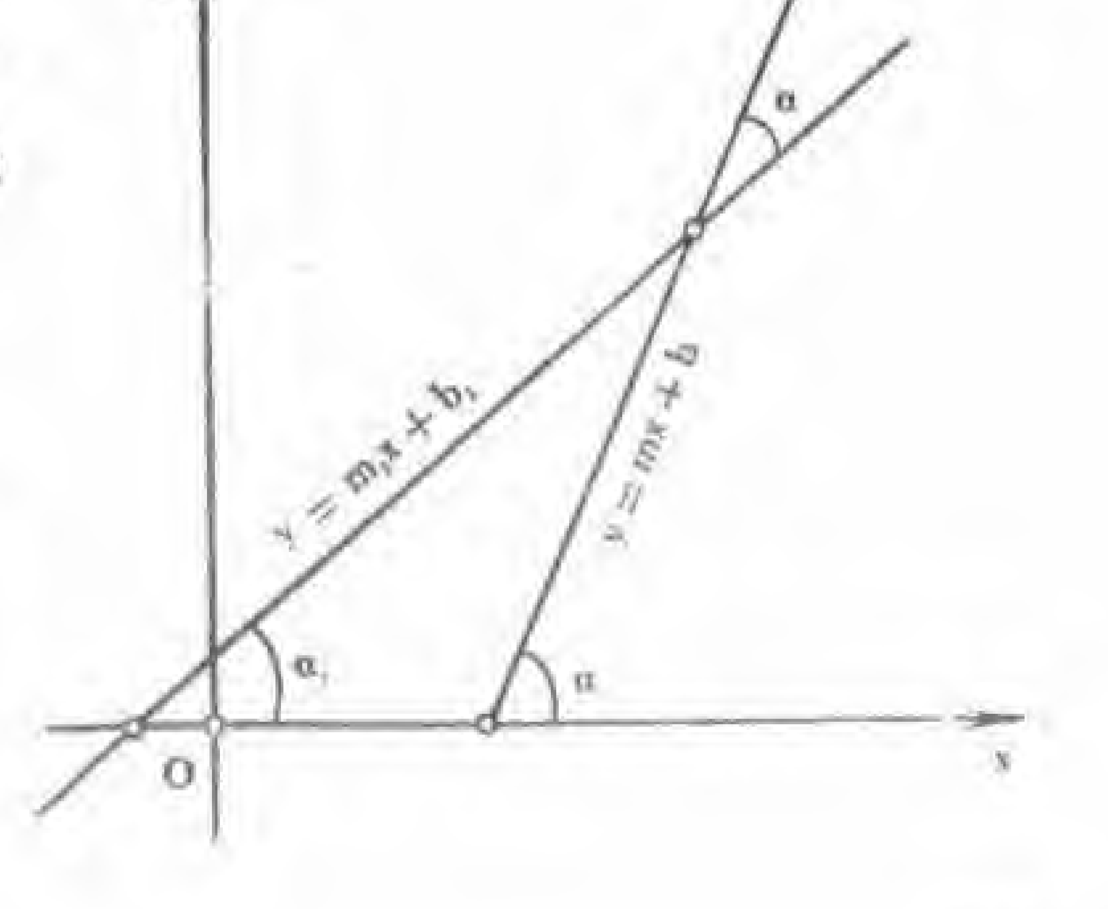
Cuando se trata de dos curvas, C y C_1, que se cortan en un punto P, se define como ángulo (α) de las dos curvas al ángulo (α) determinado por sus tangentes geométricas en el punto P.

Teniendo en cuenta que

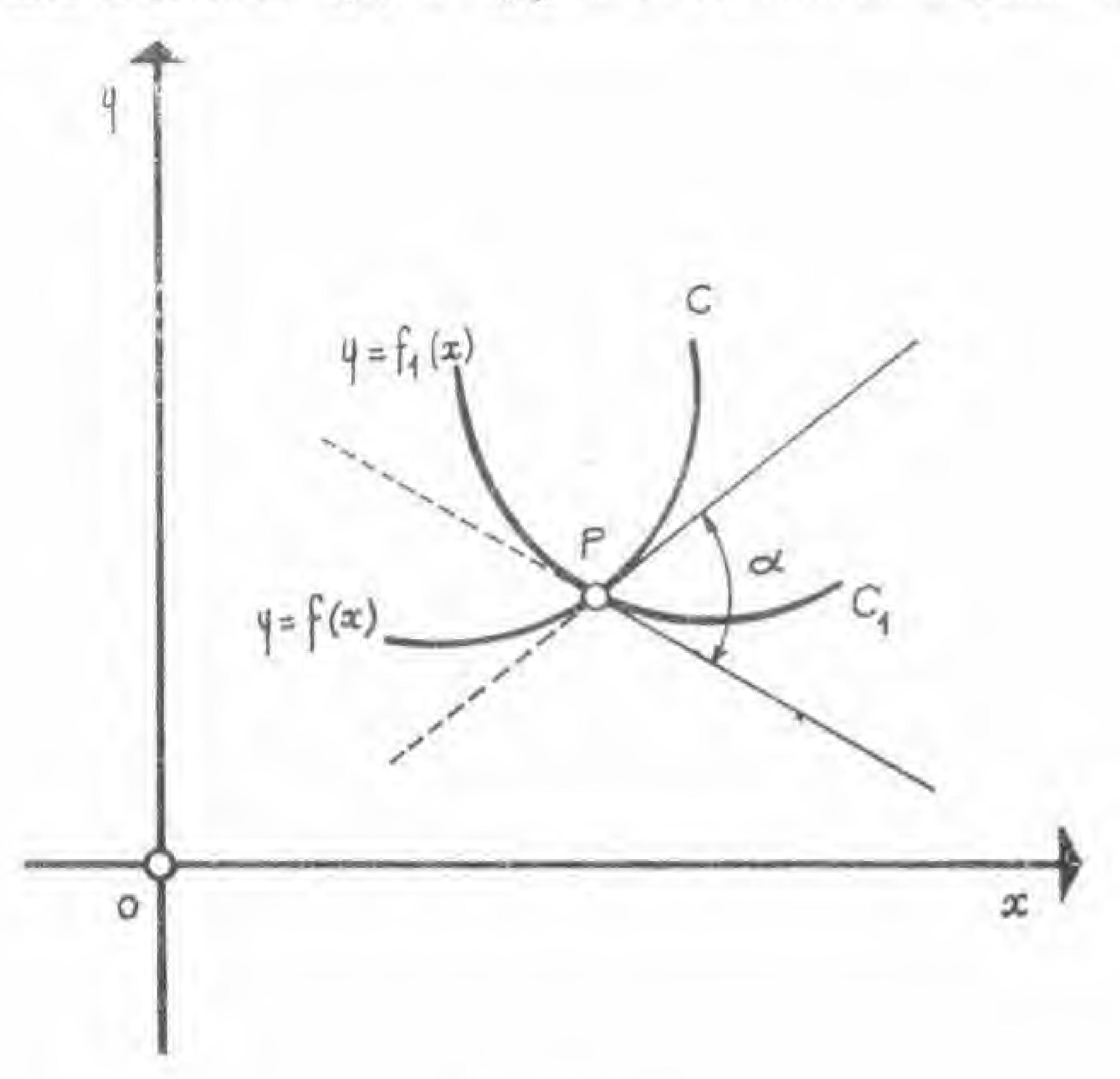
$$\begin{cases} m = y' \\ m_1 = y'_1 \end{cases}$$

se tiene

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y' y'_1}}$$



Las derivadas (y') e (y'_1) se calcularán en el punto P.



Ejercicios

I) *Determinar el ángulo que forman las curvas en su punto de intersección.*

$$x^2 = 2\,y \qquad \text{(I)}$$
$$y^2 = 2\,x \qquad \text{(II)}$$

Punto de intersección

Despejando (y) en (II) y reemplazando en (I)

$$x^2 = 2\sqrt{2\,x}$$
$$\frac{x^2}{2} = \sqrt{2\,x}$$

Elevando al cuadrado

$$\frac{x^4}{4} = 2\,x$$

o bien

$$x^3 = 8$$

de donde

$$x = 2$$

reemplazando en (II), se obtiene

$$y = 2$$

Partiendo de (I), se tiene

$$x^2 - 2\,y = 0$$

derivando y aplicando la fórmula

$$y' = -\frac{\dfrac{\delta f}{\delta x}}{\dfrac{\delta f}{\delta y}} \quad \text{resulta}$$

$$y' = -\frac{2\,x}{-2} = x$$

para $x = 2$, se tiene

$$y' = 2$$

Análogamente, derivando (II), resulta

$$y'_1 = \frac{1}{2}$$

aplicando la fórmula para determinar el ángulo buscado, se obtiene

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 - \dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{2}\cdot 2} = \frac{\dfrac{3}{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

luego

$$\boxed{\alpha = 36^\circ\ 50'}$$

II) *Determinar el ángulo de intersección de los siguientes pares de curvas:*

a) $y = \sqrt{2x}$

$x = \sqrt{2y}$

R.: $\alpha_1 = 90°$ (en el origen)
$\alpha_2 = 36° 51'$

b) $y = \text{sen } x$
$y = \cos x$

R.: $\alpha = 70° 31'$

c) $y = x^2$

$y = \sqrt{x}$

R.: $\alpha_1 = 90°$
$\alpha_2 = 36° 51'$

d) $y = x^2 - 9$
$y = x - 3$

R.: $\alpha_1 = 35° 30'$
$\alpha_2 = 59°$

e) $y = 2\sqrt{x}$

$x^2 = \frac{y}{2}$

R.: $\alpha = 31°$

CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS

En múltiples casos es difícil determinar el límite de expresiones, tales como:

1º) Cociente de dos funciones que tienen límite cero, que simbolizamos por $\frac{0}{0}$.

2º) Producto de una con límite cero y otra que tiende a infinito (∞), que expresamos por $0 . \infty$.

3º) Cociente cuando es $\frac{\infty}{\infty}$

4º) Expresiones como 0^0, ∞^0, 1^∞, etc.

El método que resuelve en general estas indeterminaciones está fundado en las derivadas y se debe a Bernoulli, aunque se llame Regla de l'Hôpital y establece: *El límite del cociente de dos funciones que se anulan para un valor cualquiera x_1 de x es el límite del cociente de sus derivadas.*

En símbolos:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to x_1} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

Si esta expresión tiene sentido aritmético, será el límite buscado. En cambio si resulta nuevamente $\frac{0}{0}$ se aplicará la regla anterior y habrá que calcular el límite del cociente de las derivadas segundas, y así sucesivamente.

Se puede demostrar que la regla de l'Hôpital también vale para el caso $\frac{\infty}{\infty}$, permitiendo calcular el límite del cociente de las dos funciones dadas en base al límite del cociente de las derivadas.

1) *Calcular el límite de*

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} \quad \text{para } x \to 4$$

Como $f(4) = \frac{0}{0}$

conviene aplicar la Regla de l'Hôpital, luego

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{2x}{2x + 1}$$

o bien

$$\lim_{x \to 4} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{8}{8 + 1} = \frac{8}{9}$$

2) *Calcular el límite de*

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^6 - 64} \quad \text{para} \quad x \to 2$$

Dado que

$$f(2) = \frac{0}{0}$$

se aplica la Regla de l'Hôpital para eliminar la indeterminación, o sea

$$\text{lím}\,\frac{f(x)}{F(x)} = \text{lim}\,\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{6\,x^{5}}$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{192}$$

3) *Calcular el límite de*

$$f(x) = \frac{3^x - e^x}{3\,x} \qquad \text{para} \qquad x \to 0$$

Dado que para $x = 0$

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

conviene aplicar la Regla de l'Hôpital, luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - e^x}{3\,x} = \frac{3^0\,ln\,3 - e^0\,ln\,e}{3} = \frac{ln\,3 - ln\,e}{3} = \frac{ln\,3 - 1}{3}$$

4) *Calcular el límite de*

$$f(x) = \frac{ln\,(1 + x)}{x} \qquad \text{para} \qquad x \to \infty$$

Reemplazando (x) por (∞), resulta $\frac{\infty}{\infty}$

luego, aplicando la Regla de l'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ln\,(1 + x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1} = 0$$

5) *Calcular*

$$\text{lím}\,\frac{ln\,x \cdot (1 - x)}{x^2} \qquad \text{para} \qquad x \to \infty$$

$$\text{lím}\,\frac{ln\,x \cdot (1 - x)}{x^2} = \text{lím}\,\frac{\frac{1}{x}(1 - x) - ln\,x}{2\,x} = \text{lím}\,\frac{\frac{1}{x} - 1 - ln\,x}{2\,x}$$

que es indeterminado, derivando numerador y denominador, resulta

$$= \text{lím}\,\frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{2} = \text{lím}\left[-\frac{x + 1}{2\,x^2}\right]$$

Volviendo a derivar numerador y denominador, se tiene

$$= \lim_{x \to \infty}\left[-\frac{1}{4\,x}\right] = 0$$

6) $\text{lím}\;f(x) = \frac{x^3 - 1}{1 - x}$ para $x \to 1$

R.: -3

7) $\text{lím}\;f(x) = \frac{ln\,x}{x - 1}$ para $x \to 1$

R.: 1

8) $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{tg\,x - x}{x - sen\,x}$

R.: 2

9) $\lim_{x \to 0} \frac{p^x - q^x}{x}$ R.: $ln\,\frac{p}{q}$

10) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$ R.: 1

11) $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2\,x}{x - sen\,x}$ R.: 2

Para eliminar la indeterminación debe calcularse la derivada segunda.

12) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 10x}{x}$ R.: 10

13) $\lim_{z \to 1} \frac{z^2 - 2z + 1}{3z^2 + 2z - 5}$ R.: 0

14) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3}$ R.: $\frac{1}{6}$

15) $\lim_{\alpha \to 90°} \left[\frac{\text{sen}^2 \alpha - 1}{\text{sen } \alpha - 1}\right]$ R.: 2

16) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\text{cotg } x}$ R.: 0

17) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$ R.: ∞

18) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$ R.: $\frac{9}{8}$

19) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{e^x - e^{-x}}$ R.: $\frac{1}{2}$

20) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$ R.: 0

21) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{2x\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ R.: ∞

22) $\lim_{x \to 180°} \frac{1 + \cos x}{\text{tg}^2\, 2x}$ R.: 0

23) $\lim_{x \to \infty} x \text{ sen } \frac{1}{x}$ R.: 1

Téngase en cuenta que

$$x \text{ sen } \frac{1}{x} = \frac{\text{sen } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

24) $\lim_{x \to -2} \frac{\text{tg } \pi x}{x + 2}$ R.: π

25) $\lim_{x \to \infty} \ln \sqrt[x]{x}$ R.: 0

26) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x + 2 \ln x}{x + 3 \ln x}$ R.: 5

27) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ R.: $\frac{1}{2}$

28) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } x}{\text{tg } 3x}$ R.: 3

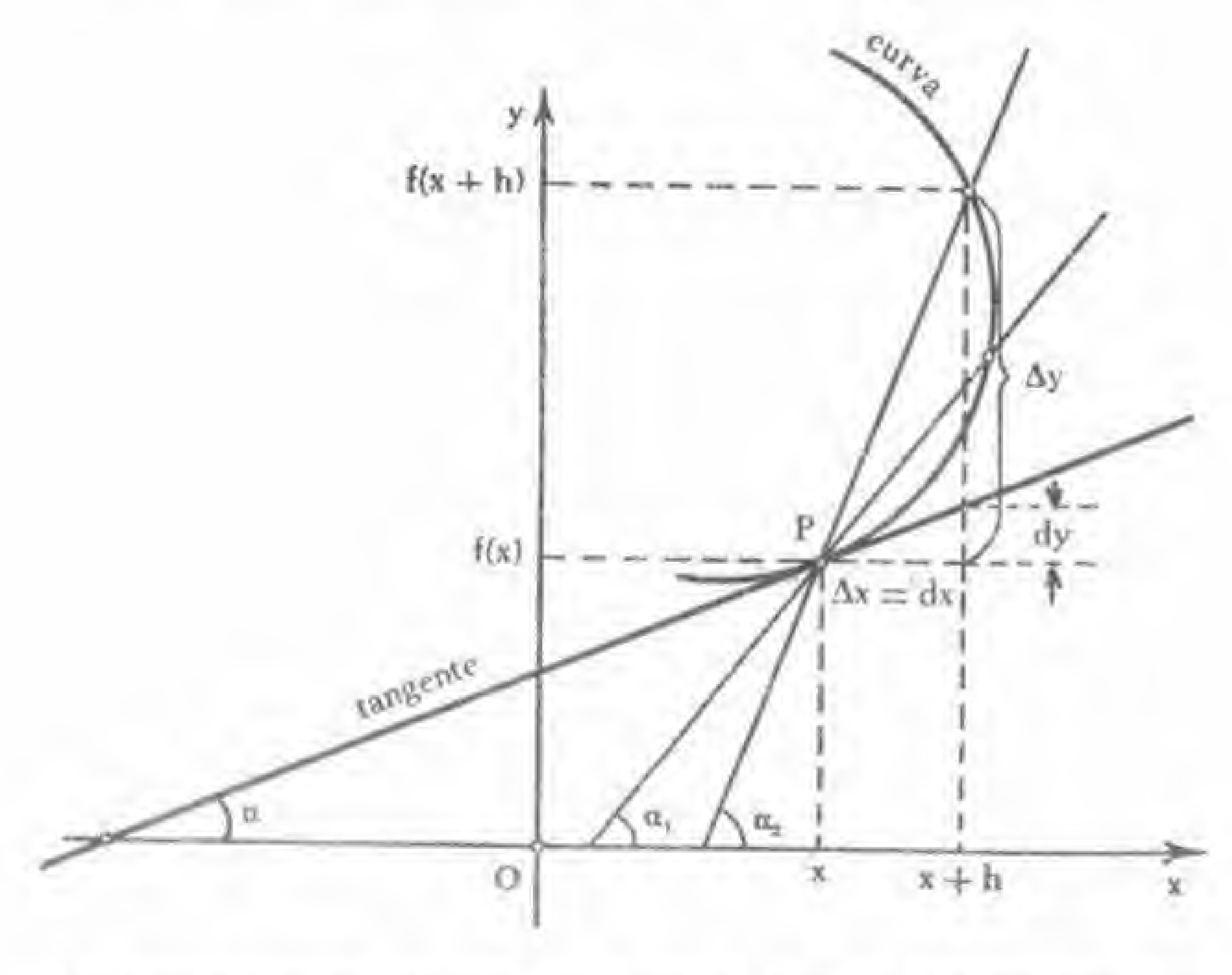
29) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\text{sen } \pi x}$ R.: $\frac{2}{\pi}$

4 DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Sea

$$y = f(x)$$

Supongamos el punto P de abscisa (x).



La derivada en el punto P es el límite alcanzado por la razón incremental en ese punto cuando tiende a cero el incremento de la variable x, o sea

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

También se puede definir la derivada en un punto como la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica forma con el eje de las (x).

Notación:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Partiendo de que la derivada es un cociente $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ se crea el concepto de *diferencial.*

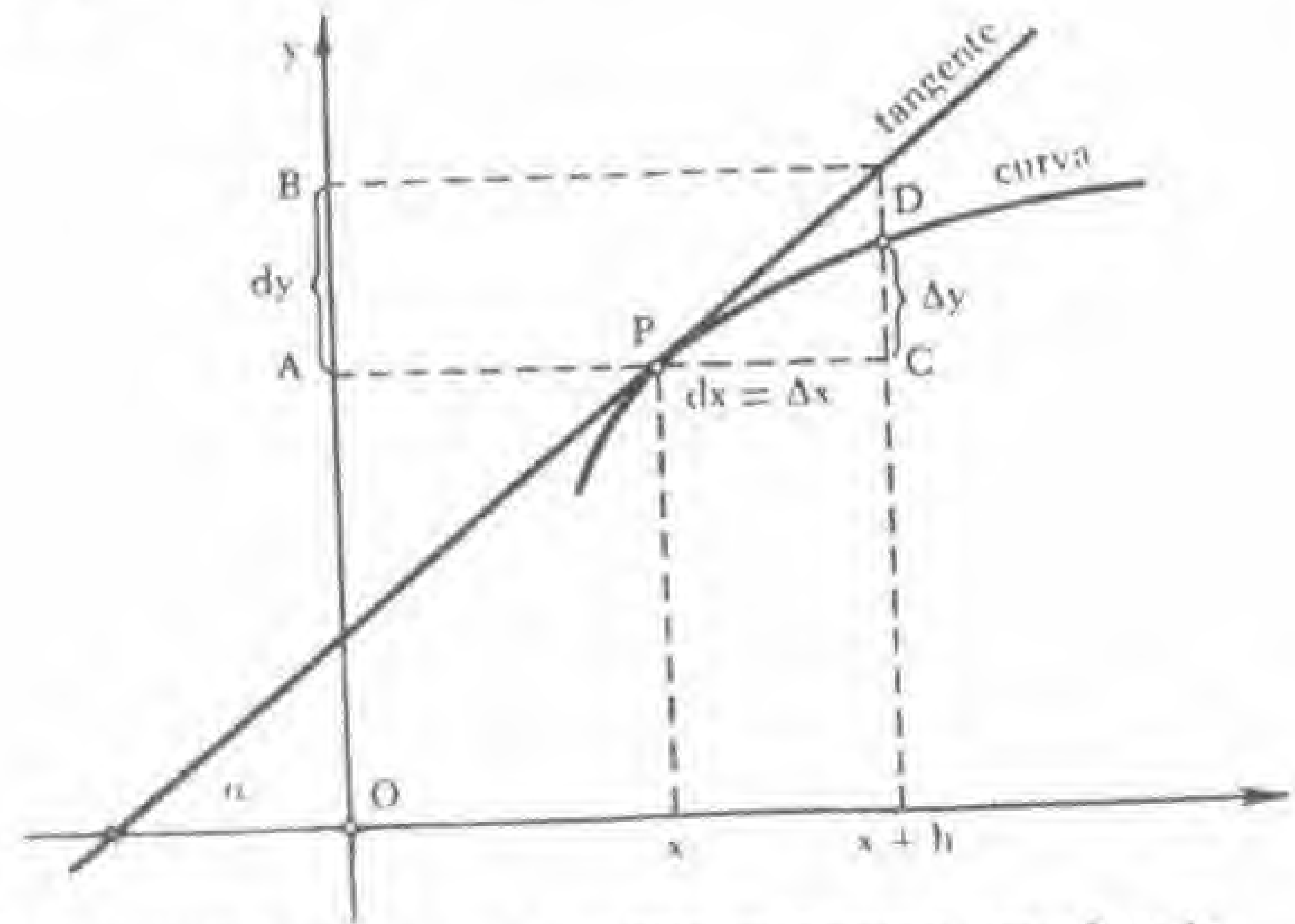
Dado que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

resulta

$$\boxed{dy = f'(x)\, dx}$$

Por tanto, la *diferencial de una función es igual al producto de la derivada por el incremento o diferencial de la variable.*



Representaremos una curva convexa, en donde

$$\Delta x = dx$$

La diferencial de la *variable* (x) es igual en valor al incremento que se ha asignado a la misma, o sea

$$dx = \Delta x$$

La diferencial de la *función* (y) es el incremento o diferencia de las ordenadas de la tangente a la curva.

En el dibujo:

$$dy = \overline{AB}$$

El incremento de la función (y) es igual al incremento de las ordenadas de la curva.

Vale decir, $\Delta y = \overline{CD}$

Cálculo de (d y) y (Δ y) de la función $y = x^2$

1) Para valores arbitrarios de x y de Δ x

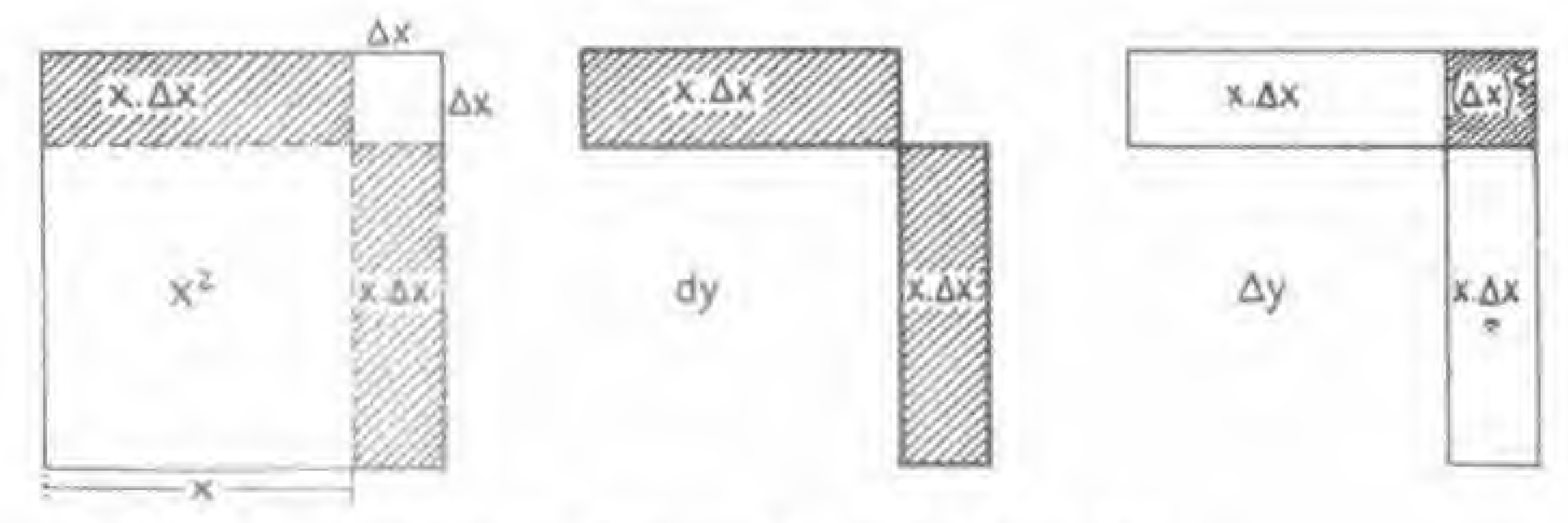
$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Además

d y = *derivada* de (x^2) multiplicada por *diferencial* de (x)

$$dy = 2x \cdot \Delta x$$



2) Para los valores $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}1$

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$$

El error que resulta al reemplazar Δ x por d y es igual a 0,01. En muchos casos se desprecia dicho error.

La diferencial como aproximación del incremento

Cuando solamente se desea un *valor aproximado* del incremento de una función, resulta muchas veces más sencillo calcular el *valor de la diferencial* correspondiente y emplear este valor.

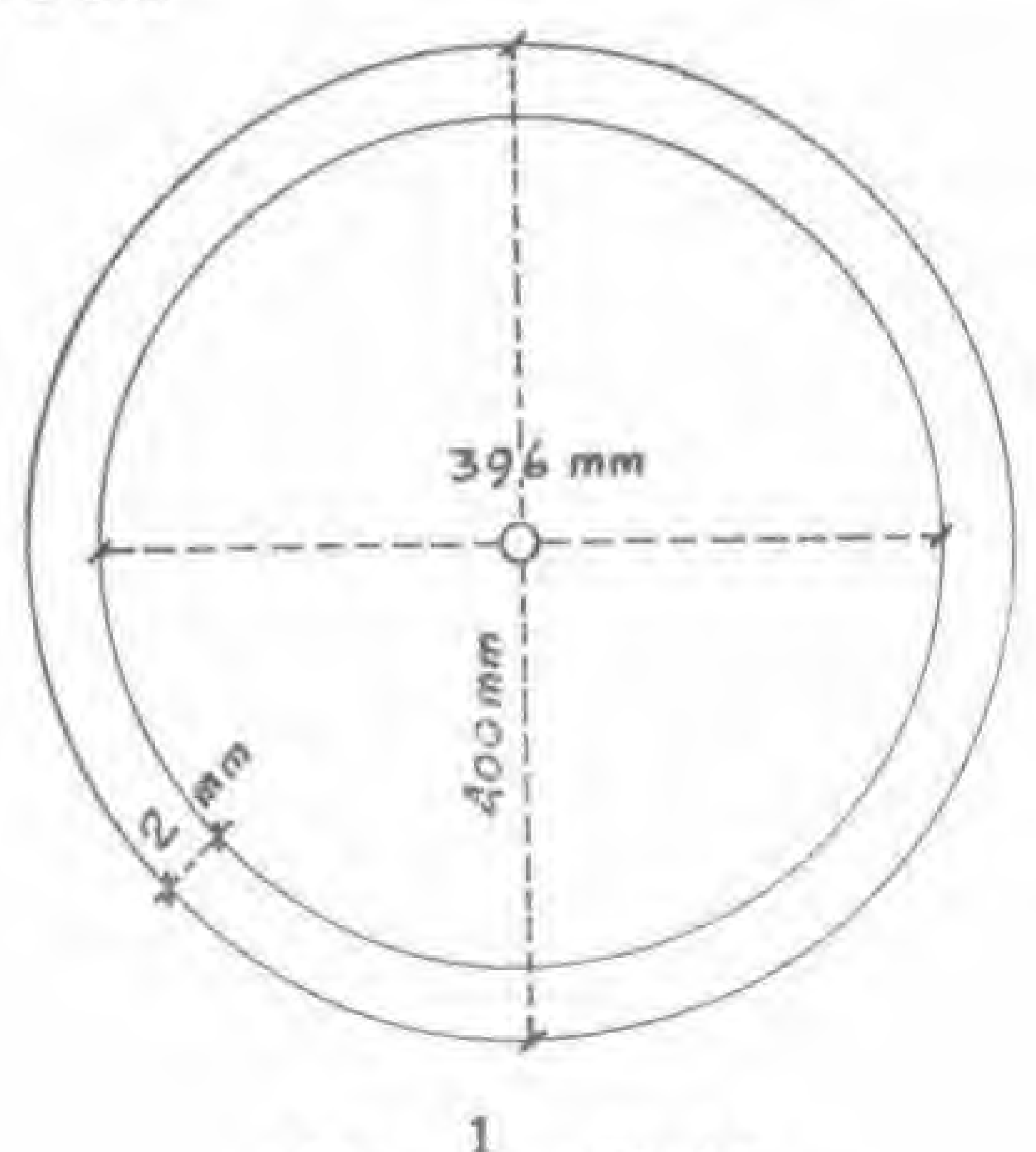
EJEMPLO:

Hallar el *valor aproximado del volumen* de una cáscara esférica de 400 mm de diámetro exterior y 2 mm de espesor.

Solución. El volumen V de una esfera de diámetro x es

$$V = \frac{1}{6} \pi \cdot x^3$$

El *volumen exacto* de la cáscara es la diferencia entre los volúmenes de dos esferas macisas de diámetros 400 mm y 396 mm, respectivamente. Pero su *valor aproximado* se obtiene calculando (δ V), o sea



$$\delta V = \frac{1}{2} \pi \cdot x^2 \cdot \delta x$$

ya que

$$\delta\left(\frac{1}{6}\pi \cdot x^3\right) = \frac{1}{2}\pi \cdot x^2 \cdot \delta x$$

Reemplazando x por 400 y δ x por (— 4), variación correspondiente a la esfera interior, se obtiene

$$\delta V = \frac{1}{2} \times 3{,}14 \times 400^2 \times (+4)$$

$$\delta V = \frac{1}{2} \times 3{,}14 \times 160.000 \times 4$$

$$\delta V = 1.004.800 \text{ mm}^3$$

No se tiene en cuenta el signo de δ x pues su significado es tan solo acusar que V disminuye al aumentar x.

El valor exacto es

$$\Delta V = \frac{1}{6}\pi \cdot 400^3 - \frac{1}{6}\pi \cdot 396^3$$

$$\Delta V = 994.786 \text{ mm}^3$$

La *aproximación* es aceptable por ser δ x relativamente pequeño en comparación con x = 400; de lo contrario el método no sería aceptable.

Reglas de diferenciación

Las reglas de diferenciación son análogas a las de derivación.

EJEMPLOS:

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

1) $y = ln\, x$

R.: $d\,(ln\, x) = \frac{1}{x}\, d\,x$

2) $y = \log x$

R.: $d\,(\log x) = \frac{\log e}{x}\, d\,x$

3) $y = a^x$

R.: $d\,(a^x) = a^x\, ln\, a\, d\,x$

4) $y = e^x$

R.: $d\,(e^x) = e^x\, d\,x$

5) $y = x^m$

R.: $d\,(x^m) = m x^{m-1}\, d\,x$

6) $y = \text{sen}\, x$

R.: $d\,(\text{sen}\, x) = \cos x\, d\,x$

7) $y = \cos x$

R.: $d\,(\cos x) = -\,\text{sen}\, x\, d\,x$

8) $y = \text{tg}\, x$

R.: $d\,(\text{tg}\, x) = \frac{d\,x}{\cos^2 x}$

9) $y = \text{cotg}\, x$

R.: $d\,(\text{cotg}\, x) = -\frac{d\,x}{\text{sen}^2 x}$

10) $y = \sec x$

R.: $d\,(\sec x) = \text{tg}\, x \sec x\, d\,x$

11) $y = \text{cosec}\, x$

R.: $d\,(\text{cosec}\, x) = -\,\text{cotg}\, x \,.\, \text{cosec}\, x\, d\,x$

12) $y = \text{arc sen}\, x$

R.: $d\,(\text{arc sen}\, x) = \frac{d\,x}{\sqrt{1 - x^2}}$

13) $y = \text{arc cos}\, x$

R.: $d\,(\text{arc cos}\, x) = -\frac{d\,x}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $y = \text{arc tg}\, x$

R.: $d\,(\text{arc tg}\, x) = \frac{d\,x}{1 + x^2}$

15) $y = \text{arc cotg}\, x$

R.: $d\,(\text{arc cotg}\, x) = -\frac{d\,x}{1 + x^2}$

16) $y = \text{arc sec}\, x$

R.: $d\,(\text{arc sec}\, x) = \frac{d\,x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

17) $y = \text{arc cosec } x$

R.: $d\,(\text{arc cosec } x) = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

18) $y = 4x^5$

R.: $dy = 20x^4\,dx$

19) $y = \sqrt{3x^2}$

R.: $dy = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2}}\,dx$

20) $y = x\,ln\,x$

R.: $dy = (1 + ln\,x)\,dx$

21) $y = 2\,\text{sen}\,3x$

R.: $dy = 6\cos 3x\,dx$

22) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^3}}$

R.: $dy = \dfrac{-2x+9}{2x^4\sqrt{\dfrac{x-3}{x^3}}}\,dx$

23) $y = e^{3x}$

R.: $dy = 3e^{3x}\,dx$

24) $y = 2x^3\sqrt{x}$

R.: $dy = \left(6\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)x^2\,dx$

25) $y = \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{3x}}$

R.: $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{3x}\,\sqrt[3]{3x}}\,dx$

26) $y = \log \text{tg}\sqrt{x}$

R.: $dy = \dfrac{\log e \cdot dx}{\text{sen}\sqrt{x}\,.\,\cos\sqrt{x}\,.\,2\sqrt{x}}$

MAXIMOS Y MINIMOS 5

Magnitud y signo de la derivada

Sea f' (a) la derivada de f (x) en el punto $x = a$.

Cuando f' (a) es *positiva*, el cociente incremental de f (x) en dicho punto será positivo, por tanto esta función crecerá cuando crezca (x), a partir del punto $x = a$.

El coeficiente angular de la tangente a la curva será también positivo y tanto la tangente como la curva estarán dirigidas hacia arriba de izquierda a derecha en el punto dado.

Todo lo contrario si f' (a) es *negativa*. En consecuencia:

—Si $f'(a) > 0$ implica que f (x) es creciente al crecer x y que la curva representativa asciende hacia la derecha en el punto de abscisa (a).

— Si $f'(a) < 0$ significa que f (x) es decreciente al crecer (x) y que la curva correspondiente es descendente hacia la derecha en el punto $x = a$.

El *número* que *exprese la derivada* medirá el "movimiento" o "rapidez" con que la función $y = f(x)$ crece o decrece en dicho punto y la pendiente con que la curva representativa de la función asciende o desciende en el punto de referencia.

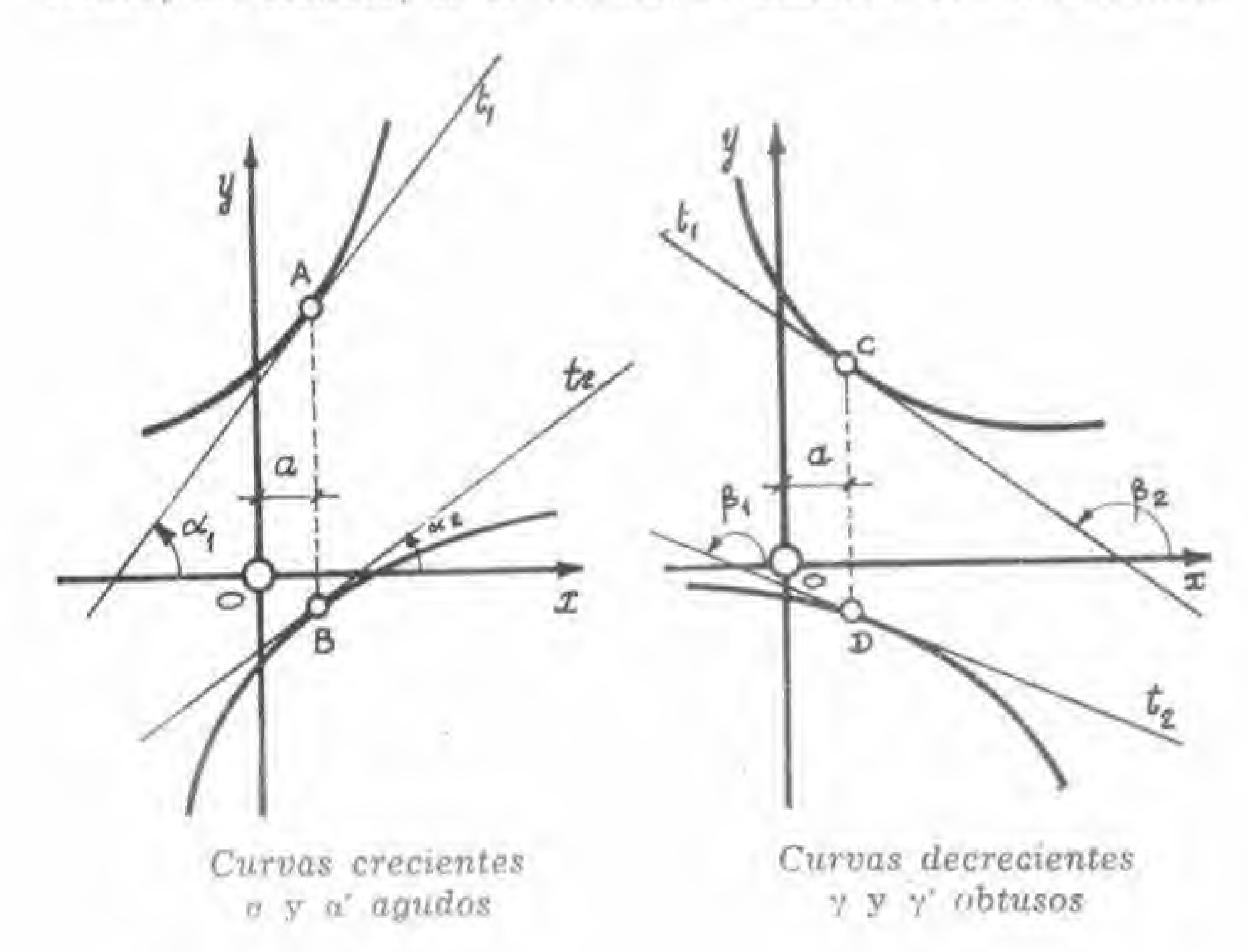
Un caso singular es aquel en que la derivada en un punto es *nula*.

O sea, si $f'(a) = 0$, la función f (x) no será ni creciente ni decreciente en el punto de abscisa (a). Correlativamente, la curva $y = f(x)$ no ascenderá ni descenderá tampoco en

dicho punto. El valor de la función se hace, pues, momentáneamente estacionario y la tangente a la curva en el punto considerado es paralela al eje de las abscisas.

También se puede establecer si la función es creciente o decreciente teniendo en cuenta que la tangente trigonométrica de un ángulo agudo u obtuso es positiva o negativa, respectivamente.

En efecto, si el ángulo determinado por el eje de abscisas y la tangente a la curva es *agudo*, la función es *creciente*; en cambio, si es *obtuso*, la función es *decreciente*.



Curvas crecientes
α y α' agudos

Curvas decrecientes
γ y γ' obtusos

Ejemplo I:

Sea

$$y = -x^2 + 2x$$

Su derivada

$$y' = -2x + 2$$

o bien

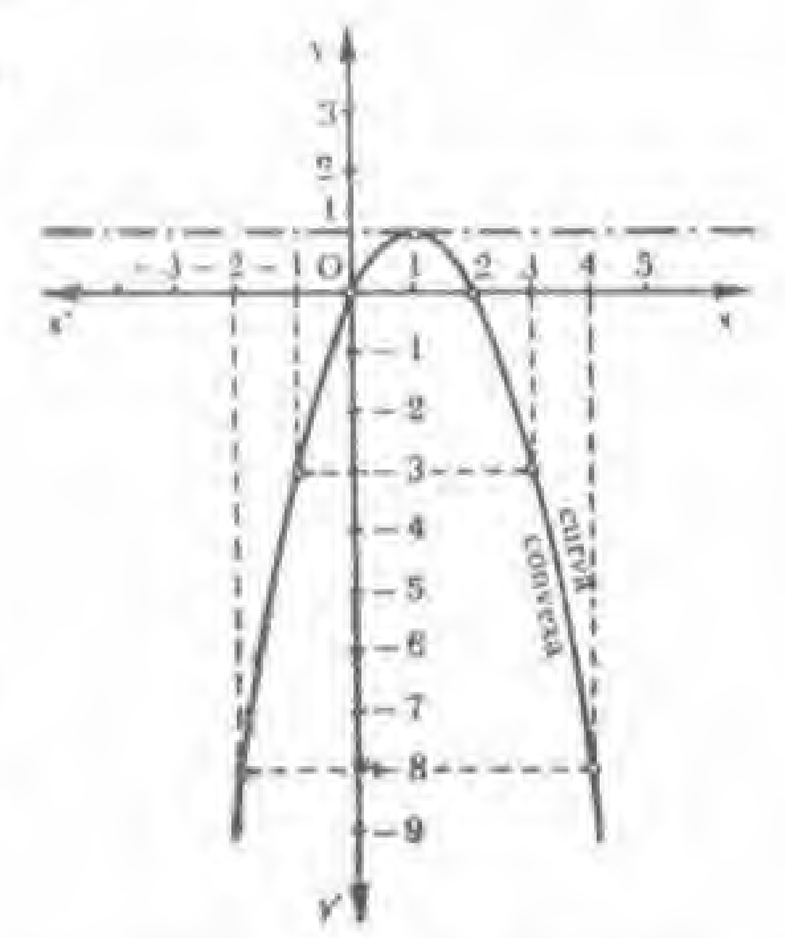
$$y' = -2[x - 1]$$

Luego

- **(y') será positiva, siempre que $x < 1$; la función (y)** *crecerá* a la izquierda del punto $x = 1$.
- (y') será nula, cuando $x = 1$; la función será *estacionaria* en este punto.
- (y') será *negativa*, siempre que $x > 1$; la función *decrecerá para valores superiores a* $x = 1$.

Representemos ahora gráficamente la función dada

$$y = -x^2 + 2x$$



Cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	−1	−2
y	0	1	0	−3	−8	−3	−8

La curva representativa es una parábola con un *máximo* $y = 1$, correspondiente a la abscisa $x = 1$.

Ejemplo II:

Sea

$$y = x^2 - 4x + 6$$

Su derivada

$$y' = 2x - 4$$

O bien

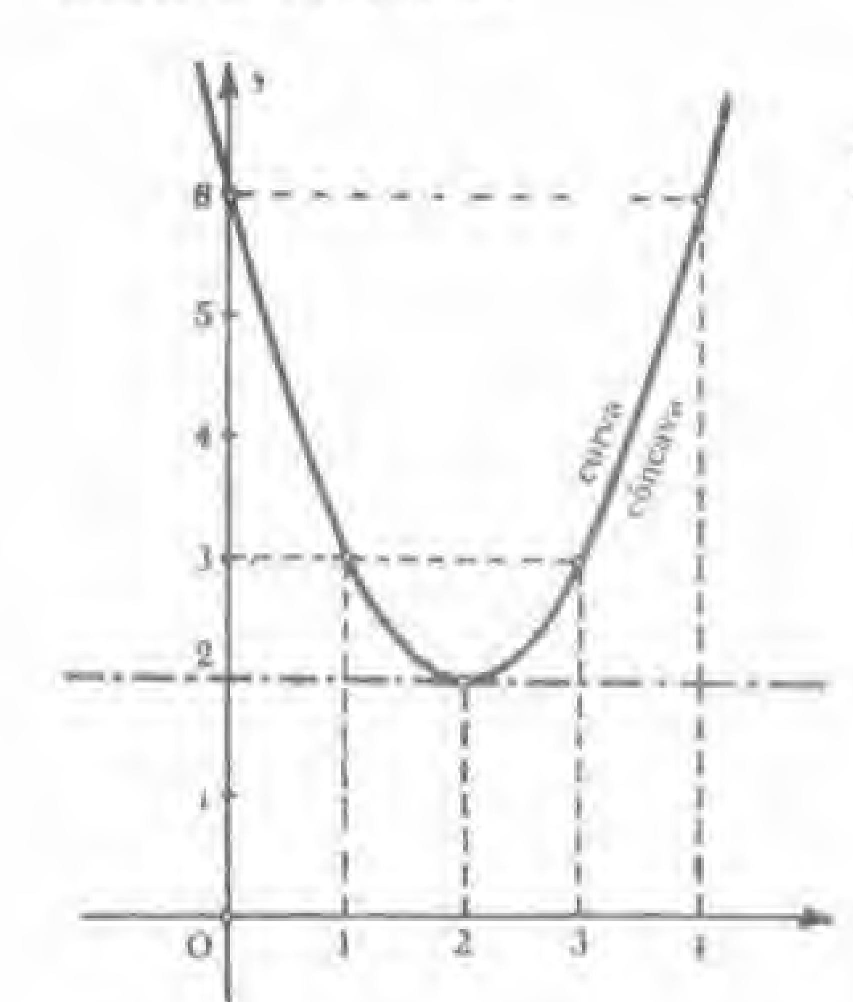
$$y' = 2[x - 2]$$

Por lo tanto:

- (y') será *negativa* para $x < 2$; en este caso la función es *decreciente* a la izquierda del punto de abscisa $x = 2$.

• (y') será *nula* cuando $x = 2$ y, por lo tanto, la función será *estacionaria*.

• (y') será *positiva* si $x > 2$ y, por lo tanto, la función será *creciente*.



Representemos gráficamente la función dada

$$y = x^2 - 4x + 6$$

Cuadro de valores

x	0	1	2	3	4
y	6	3	2	3	6

La imagen geométrica de la función dada es una parábola con un mínimo $y = 2$ en el punto $x = 2$.

EJEMPLO III:

Sea

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x$$

Su derivada

$$y' = x^2 - 6x + 9$$

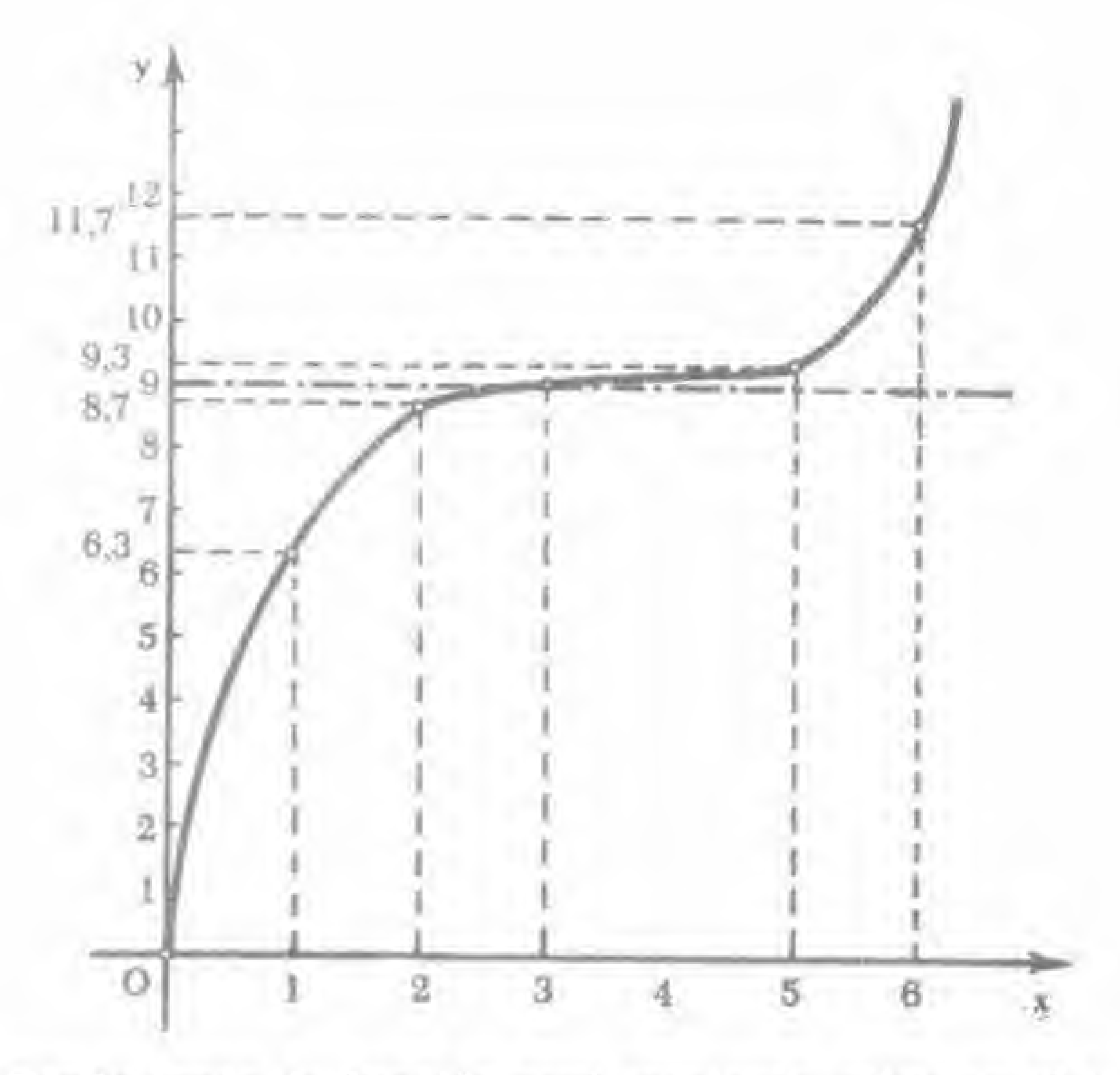
O bien

$$y' = [x - 3]^2$$

Esta derivada es *positiva* para todo valor que se le asigne a (x), excepto en $x = 3$, en el cual se hace igual a cero.

Cuadro de valores

x	0	1	2	3	5	6
y	0	6,3	8,7	9	9,3	11,7



Por lo tanto, la función será *creciente*, salvo en el punto $x = 3$, en el cual tendrá un valor estacionario $y = 9$.

El gráfico ilustra cómo la curva representativa asciende, con excepción del punto en que la tangente a la misma es paralela al eje de las abscisas. Claro está que el valor *estacionario* de la función, en este caso, no es ni *máximo* ni *mínimo*, sino que tipifica un punto de *inflexión*.

Concavidad y convexidad. — Una función es *convexa* en el punto (x) si sus ordenadas son menores que las de la tangente a la curva en dicho punto, a ambos lados del mismo.

El gráfico del ejemplo I representa que la curva a ambos lados del punto $x = 1$ queda por debajo de la tangente. Esta curva se denomina *convexa*. (Fig. 1, pág. siguiente.)

Una función es *cóncava* en el punto (x) si sus ordenadas son mayores que las de la tangente a la curva en dicho punto, a ambos lados del mismo. (Fig. 2, pág. siguiente.)

El dibujo del ejemplo II representa que la curva cóncava a ambos lados del punto $x = 2$ queda por encima de la tangente.

Por otra parte, si consideramos el ángulo (α) que las tangentes geométricas a la curva forman con el eje de las

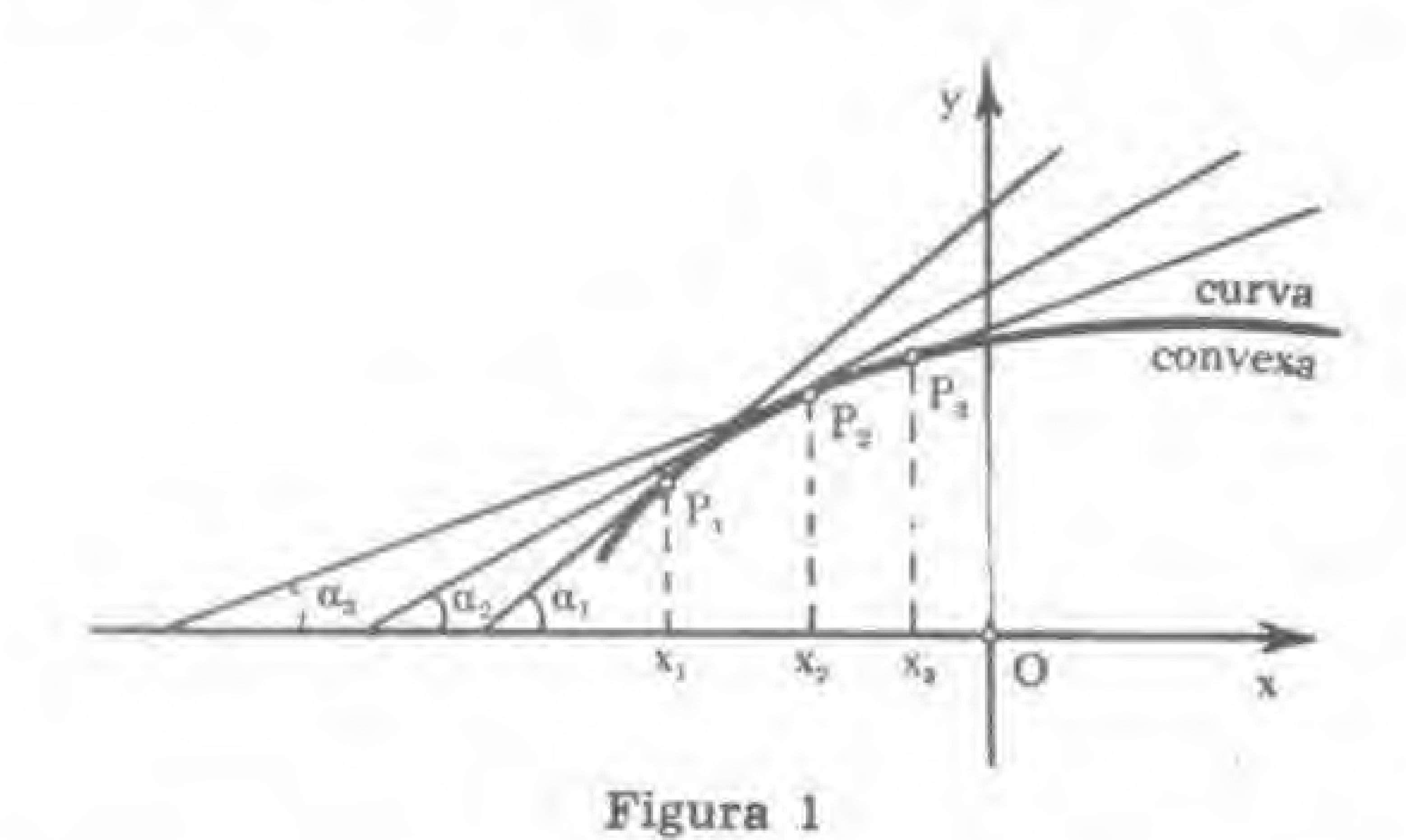


Figura 1

equis, resulta que si la curva es convexa, a medida que la abscisa x de un punto de la curva avanza hacia la derecha,

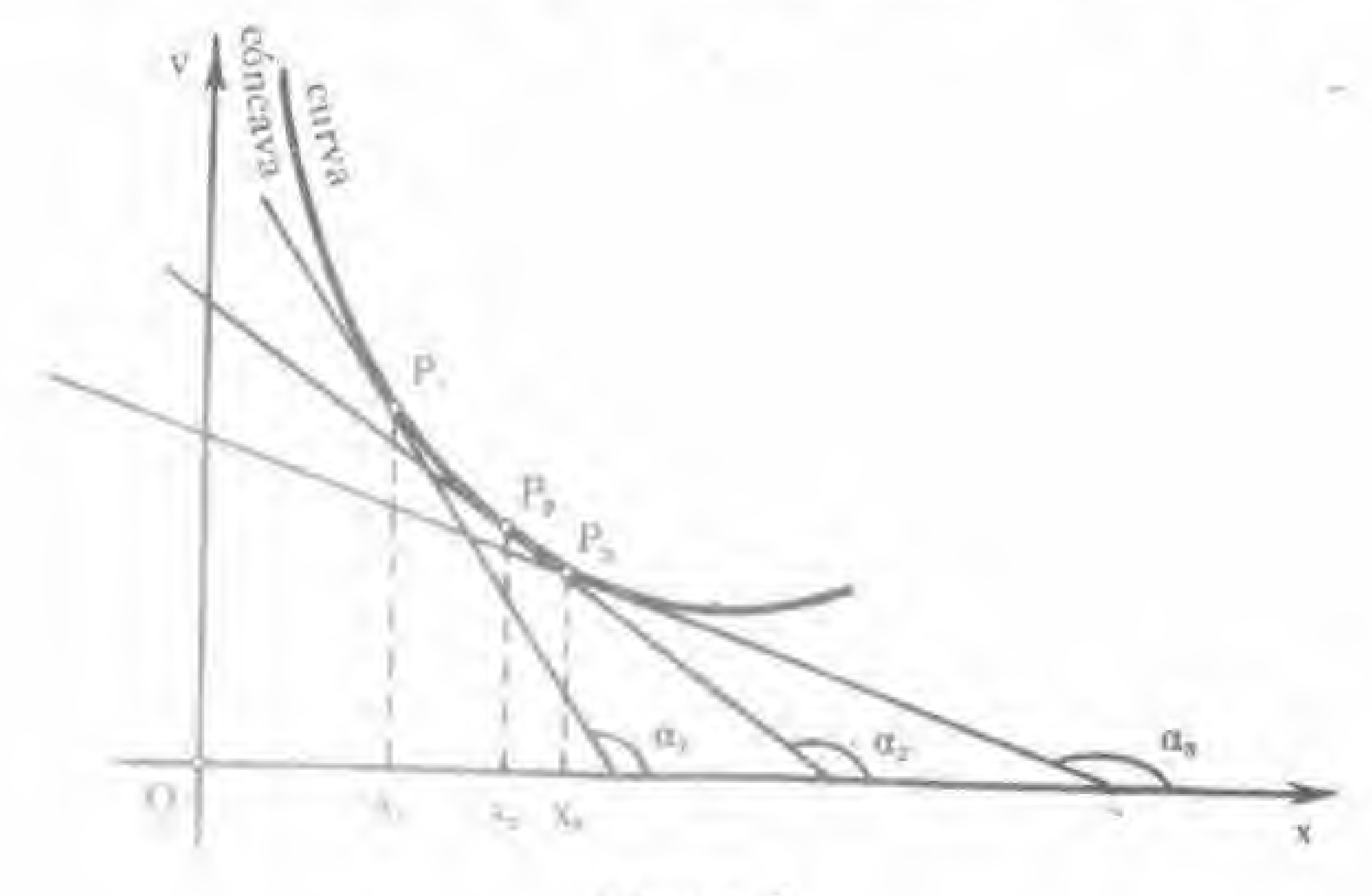


Figura 2

estos ángulos van disminuyendo, y que si la curva es cóncava, estos ángulos aumentan.

O sea, que *en las curvas convexas la pendiente decrece y en las cóncavas crece.*

Pero la pendiente, o sea la tangente trigonométrica, es la primera derivada $f'(x)$; luego podemos conocer si una curva es convexa o cóncava estudiando su primera derivada y viendo si decrece o crece en un entorno del punto de referencia.

Pero es más fácil abordar esta cuestión teniendo en cuenta una observación que establece: cuando $f'(x)$ *decrece,* o sea cuando la curva es *convexa,* la segunda derivada $f''(x)$ es *negativa.*

Análogamente, si $f'(x)$ *crece,* o sea cuando la curva es cóncava la segunda derivada $f''(x)$ es *positiva.*

Con símbolos

$f(x)$ convexa $f'(x)$ decrece $f''(x) < 0$

$f(x)$ cóncava $f'(x)$ crece $f''(x) > 0$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Se dice que una función tiene un *máximo* en un punto cuando sus ordenadas a la izquierda y a la derecha del punto son inferiores a la correspondiente al mismo.

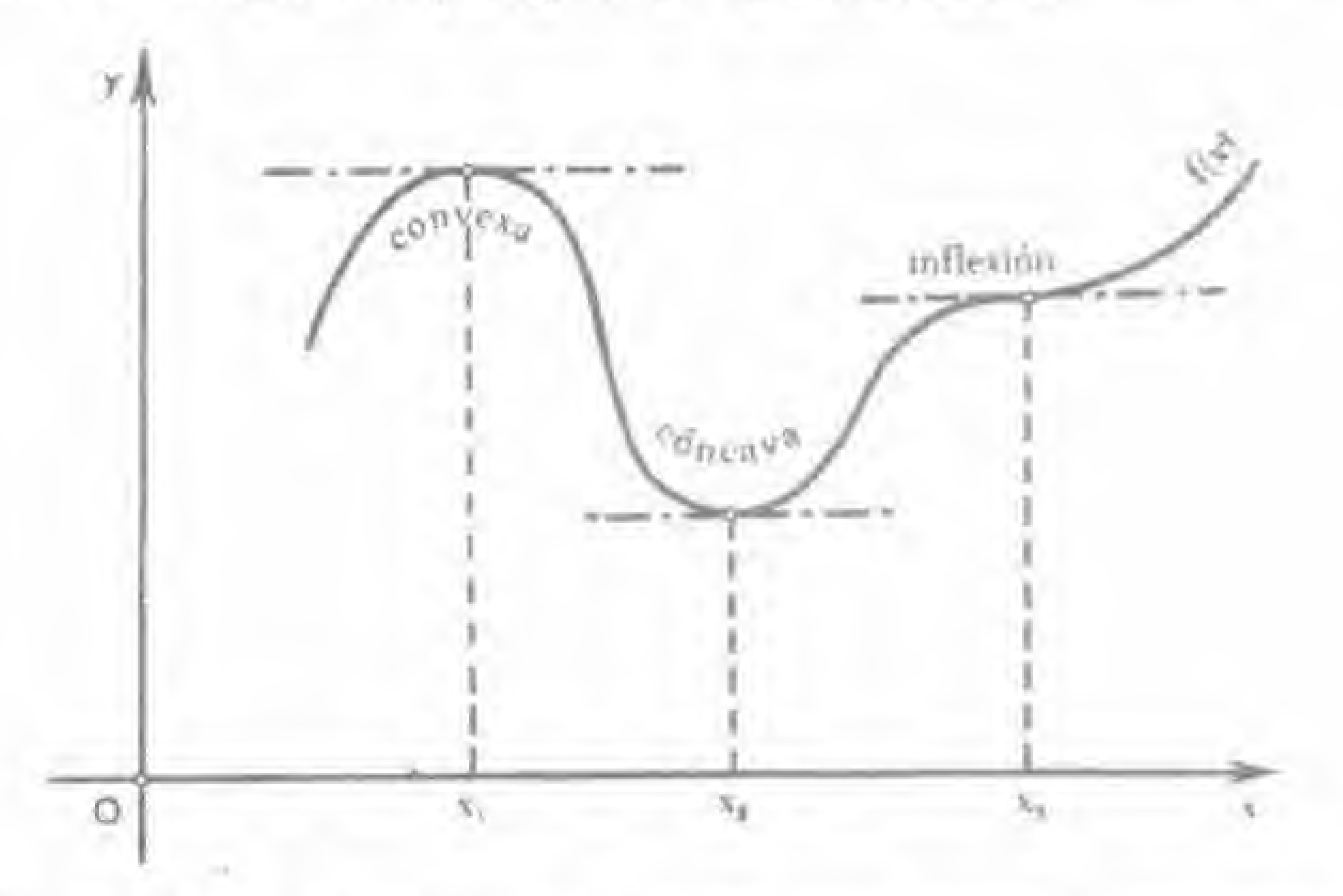
Se dice que una función tiene un *mínimo* en un punto cuando las ordenadas en su entorno son superiores a la correspondiente al punto.

En el caso de un *máximo,* la función crece a la izquierda del punto y decrece a la derecha, y en un *mínimo* sucede al contrario.

Con otras palabras, *cuando existe máximo la derivada pasa de positiva a negativa, y cuando hay mínimo sucede al contrario.* Es decir, en ambos casos habiendo máximo o mínimo la primera derivada es nula:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Esta condición es necesaria, pero no suficiente, puesto que se presentan casos como el del ejemplo III del artículo titulado "Magnitud y signo de la derivada".



Condición suficiente. — Un *máximo* sólo se presenta si la curva es *cónvexa*, y un *mínimo* si la curva es *cóncava*.

En los otros puntos, como el (x_3) en que se anula la primera derivada sin existir máximo o mínimo, la curva no es cóncava ni convexa.

Con la introducción de la *derivada segunda*, se establece la condición suficiente.

Característica de la imagen geométrica de la derivada segunda

Una vez caracterizados los máximos y mínimos relativos con la condición $f'(x) = 0$, mostraremos gráficamente cómo se puede distinguir un máximo y un mínimo analizando el comportamiento de la derivada segunda.

Sea la función $f(x)$ como ilustra el grabado. Se construyen luego los gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$ correspondientes a las derivadas primera y segunda.

Si consideramos el arco A B C se observa que *la pendiente de la curva es positiva en A, se anula en B y es negativa*

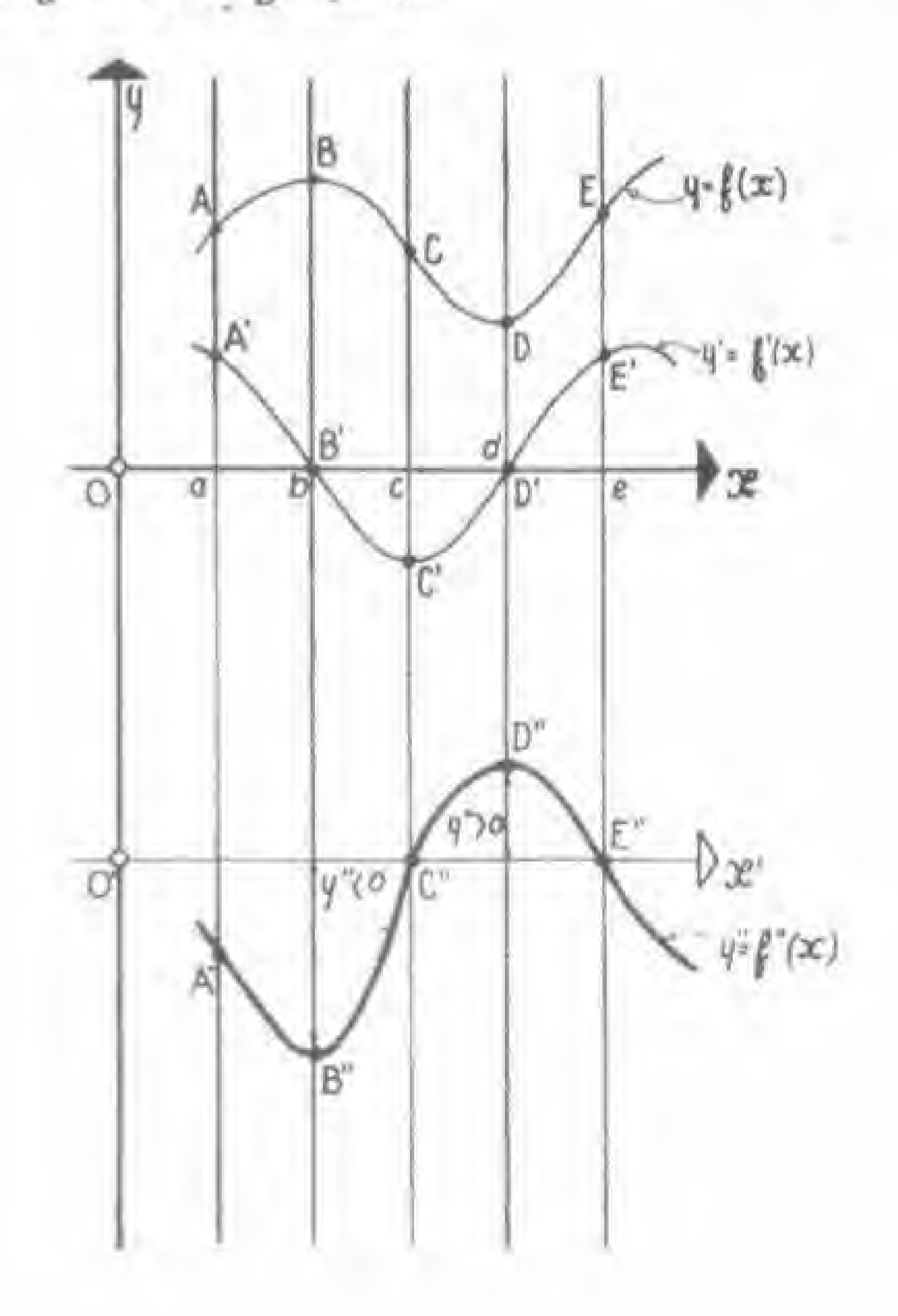
en C. Esto lo muestra el arco A'B'C' correspondiente a la derivada, que tiene ordenada positiva en *a*, nula en *b* y negativa en c.

En consecuencia, *la función $f'(x)$ es decreciente para $x = b$, y por lo tanto su derivada, o sea la derivada segunda y'' debe ser negativa.*

Por ello, un *máximo relativo* en un punto $x = b$ queda caracterizado por $y' = 0$ e $y'' < 0$.

Si consideramos ahora el arco C D E, se nota que teniendo pendiente negativa en C llega a tener pendiente positiva en E, anulándose en D. El arco correspondiente C'D'E' de la función derivada tendrá ordenada negativa para $x = c$, nula para $x = d$ y positiva para $x = e$. Se está en presencia de una función creciente para $x = d$. Su derivada, es decir la derivada segunda, debe ser positiva.

La propiedad de un *mínimo relativo* tal como en el caso de $x = d$ es $y' = 0$ e $y'' > 0$.



Regla general. — Para estudiar si una función tiene máximos o mínimo, se forma su primera derivada y se observa para qué valores de (x) se anula, para lo cual se resuelve la ecuación

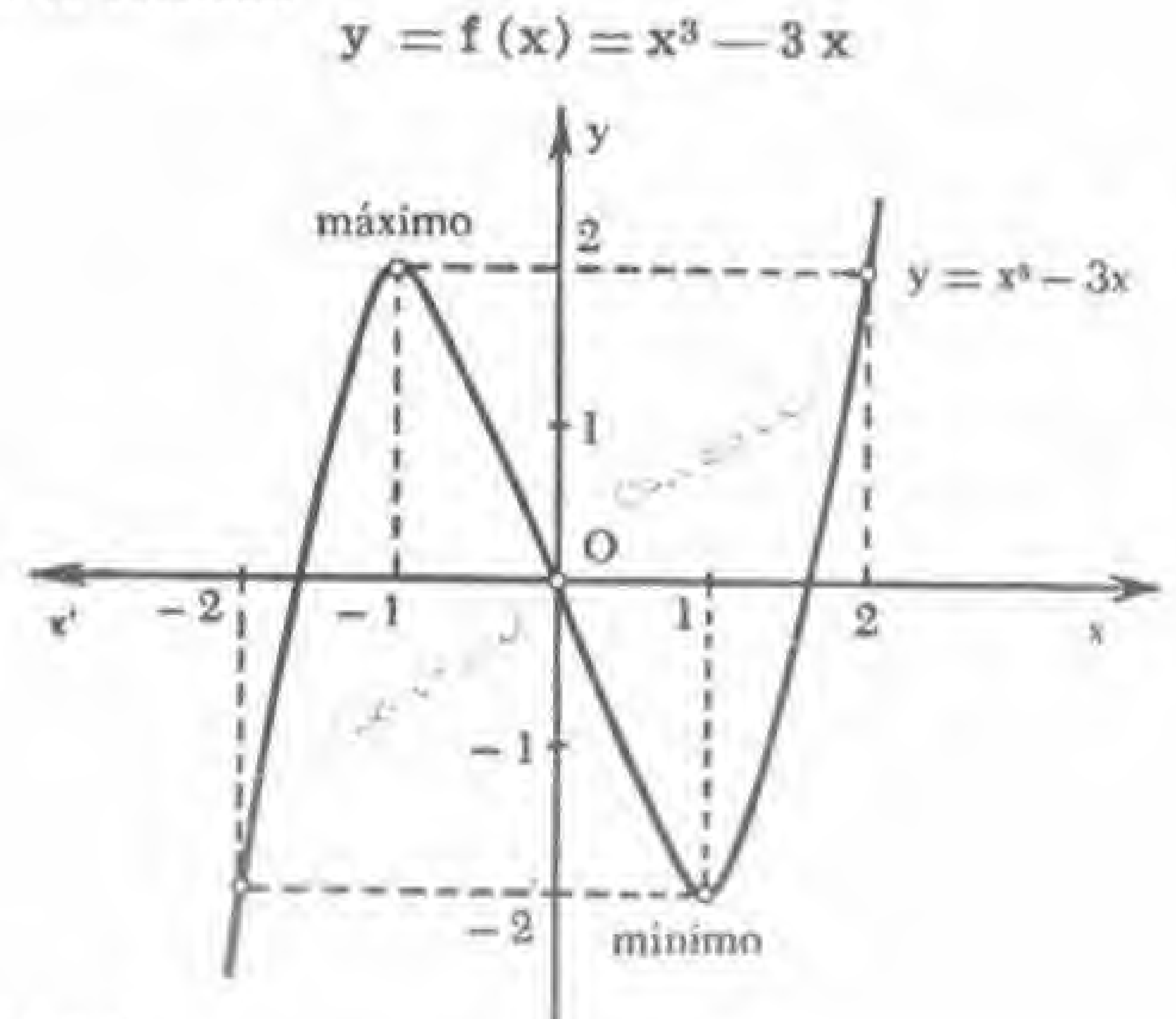
$$f'(x) = 0$$

Se calcula después la *segunda derivada* y veremos qué signo presenta en los puntos donde se había anulado la primera; si es negativa, habrá máximo; si es positiva, mínimo. Si la segunda derivada es nula, calcularemos su valor para otros puntos próximos al anterior, a la izquierda y a la derecha. Si a ambos lados resultan valores positivos, hay mínimos; si son negativos, hay máximos.

EJEMPLOS:

I) Sea la función

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$



Su derivada

$$y' = 3x^2 - 3$$

Si $\quad x = \pm 1$

$$y' = 0$$

luego en el punto de abscisa $x = \pm 1$ existe un máximo o un mínimo.

Condición suficiente:

$$y'' = 6x$$

pero si $\quad x = 1$

$$y'' = 6 > 0$$

en consecuencia, la función presenta un *mínimo* en el punto $x = 1$, y un *máximo* en el punto $x = -1$.

En estos puntos toma los valores

$$f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

y

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

II) Sea

$$y = -2x^3 + 24x$$

Su derivada

$$y' = -6x^2 + 24 \qquad (1)$$

cuando

$$-6x^2 + 24 = 0 \qquad (2) \qquad \text{es} \qquad y' = 0$$

resolviendo la ecuación (2), resulta

$$x = \pm 2$$

La derivada segunda de la relación (1)

$$y'' = -12x$$

es *positiva* para el punto $x = -2$, por cuanto

$$y'' = -12(-2) = +24$$

luego la curva presenta un *mínimo* en el punto $x = -2$.

Para el punto $x = +2$

$$y'' = -12(+2) = -24 < 0$$

en consecuencia, la curva presenta un máximo para el punto de abscisa $x = +2$.

III) *Hallar los máximos o mínimos:*

$$y = 2x + \frac{5}{x^2} + 1$$

R.: $\left.\begin{matrix} x = 1,71 \\ y = 6,14 \end{matrix}\right\}$ *mínimo*

IV)

$$y = x^3 + x^2 - 10\,x + 8$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = -2,19 \\ y_1 = 24,19 \end{array}\right\}$ *máximo*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = 1,52 \\ y_2 = -1,38 \end{array}\right\}$ *mínimo*

V)

$$y = 4\,x^3 - x^2 - 2\,x + 1$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_1 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ *mínimo*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -\dfrac{1}{3} \\ y_2 \sim \dfrac{7}{5} \end{array}\right\}$ *máximo*

VI)

$$y = -x^2 + x + 4$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_1 = \dfrac{17}{4} \end{array}\right\}$ *(máximo)*

VII)

$$y = 10\,x^2 + 12\,x + 5$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{3}{5} \\ y_1 = \dfrac{7}{5} \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

VIII)

$$y = x^3 - 3\,t\,x\,y + y^3$$

R.: $x_1 = y_1 = t$ *(mínimo)*

IX)

$$y = x^3 - 3\,x^2 + 5$$

R.: $x_1 = 0 \;;\; y_1 = 5$ *(máximo)*
$x_2 = 2 \;;\; y_2 = 1$ *(mínimo)*



X)

$$y = \frac{3}{x^2 + x + 1}$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x = 0,5 \\ y = 4 \end{array}\right\}$ *máximo*

XI)

$$y = 2\,x^2 - 5\,x - 3$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5}{4} \\ y_1 = -\dfrac{49}{8} \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

XII)

$$y = x^2 - 2\,x^3$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{3} \\ y_2 = \dfrac{1}{27} \end{array}\right\}$ *(máximo)*

XIII)

$$y = x^3 + x^2 - 8\,x + 1$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4}{3} \\ y_1 = -\dfrac{149}{27} \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = 13 \end{array}\right\}$ *(máximo)*

XIV)

$$y = x^2 \cdot e^{-x}$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ y_2 = \dfrac{4}{e^2} \end{array}\right\}$ *(máximo)*

XV)

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

R.: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ *(máximo)*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ *(mínimo)*

XVI) $y = x^4 - 10\,x^2 + 9$

R.: $x_1 = 0\,;\, y_1 = 9$ *máximo*

$\left.\begin{array}{l} x_2 = \sqrt{5}\,;\, y_2 = -16 \\ x_3 = -\sqrt{5}\,;\, y_3 = -16 \end{array}\right\}$ *mínimo*

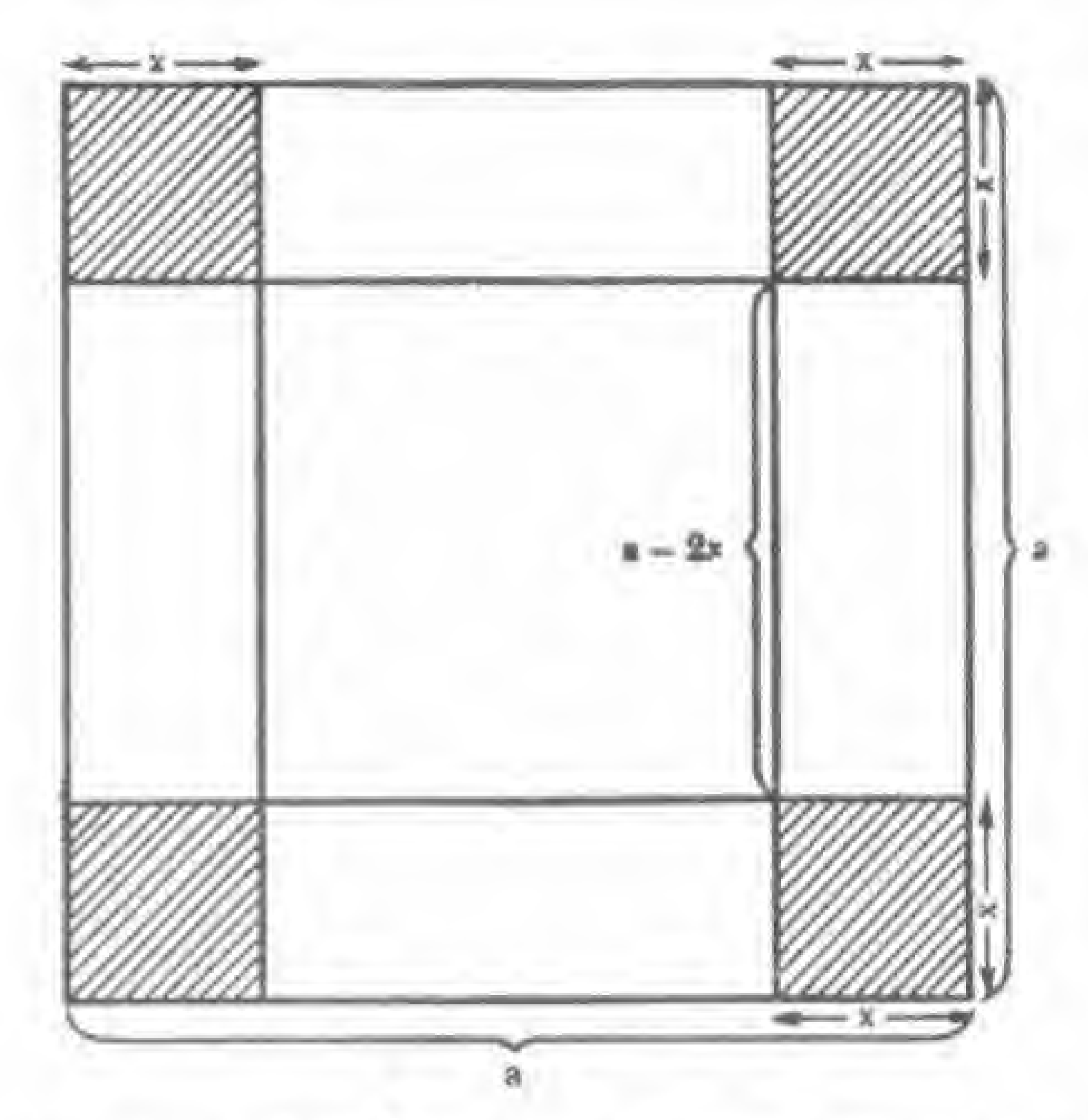
XVII) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6\,x + 1$

R.: $x_1 = -2\,;\, y_1 = 8{,}3$ *máximo*

$x_2 = 3\,;\, y_2 = -12{,}5$ *mínimo*

XVIII) **Problema. —** *Con un trozo cuadrado de plancha ha de construirse un depósito cuadrado abierto por su parte superior. Calcular el depósito de capacidad (volumen) máxima.*

Para construir un depósito de esta clase se han de recortar en los cuatro ángulos cuatro pequeños cuadrados y doblar luego las paredes laterales obtenidas. El tamaño de estos cuadrados recortados (rayados en la figura) teóricamente puede variar en longitud desde 0 hasta $\frac{a}{2}$. Para cero, nuestros cuadrados serían los cuatro vértices de la chapa y el depósito carecería de altura por no haber nada que doblar.



En cambio, para $x = \dfrac{a}{2}$ habría de recortarse toda la plancha y el depósito no tendría fondo.

Vamos a calcular el depósito que tenga el volumen máximo.

Designaremos (y) a todos los volúmenes posibles, siendo la variable arbitraria (x) la longitud del lado de uno de los cuadrados recortados.

Volumen = Sup. base × altura

$y = (a - 2\,x)^2 \,.\, x$ (la base es un cuadrado)

luego

$y = (a^2 - 4\,a\,x + 4\,x^2)\,.\,x$

o bien

$y = 4\,x^3 - 4\,a\,x^2 + a^2 x$

Calculemos su derivada

$$y' = 12\,x^2 - 8\,a\,x + a^2$$

Pero la condición para que exista un máximo es que

$$y' = 12\,x^2 - 8\,a\,x + a^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, resulta

$x_1 = \dfrac{2\,a}{6} + \dfrac{a}{6} = \dfrac{a}{2}$ (caso límite) de mayor altura

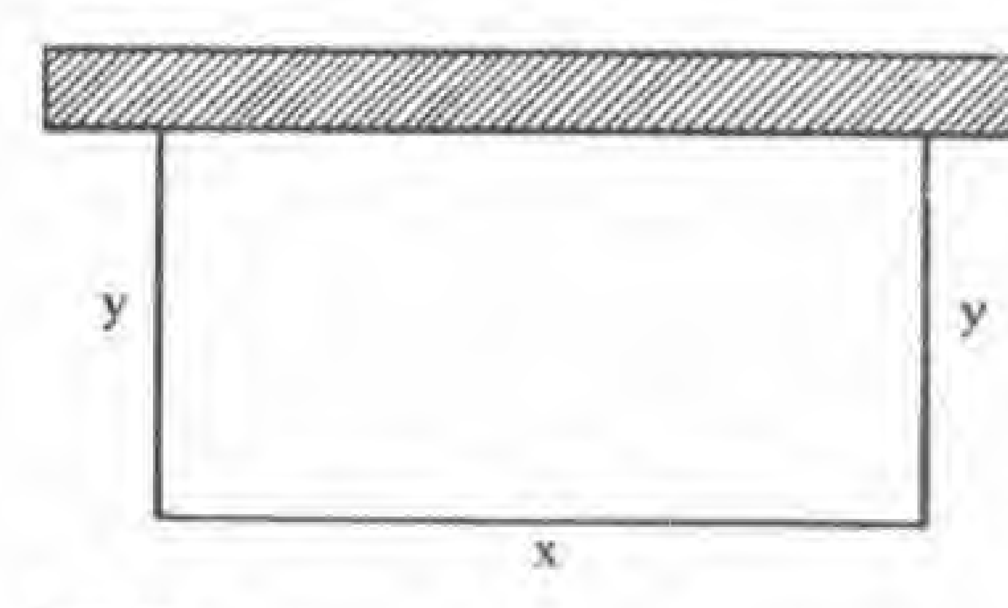
$$x_2 = \frac{2a}{6} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$$

El volumen tendrá un *máximo* cuando se le recorten a la plancha primitiva cuadrados de lado $\left(\frac{a}{6}\right)$ con lo que el cuadrado de la base tendrá por lados

$$a - 2\frac{a}{6} = \frac{2}{3}a$$

y la altura del depósito será $\left(\frac{a}{6}\right)$

XIX) **Problema.** — *Con un rollo de alambre de longitud conocida construir junto a una pared un recinto de superficie máxima.*



Dato longitud = 36 m.

Superf. rectángulo = x . y

La longitud del alambre es

$$x + y + y = x + 2y = 36 \text{ m}$$

luego

$$x = 36 - 2y \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad Sup = (36 - 2y) \cdot y$$

$$Sup = 36y - 2y^2$$

Derivando

$$Sup' = 36 - 4y$$

Igualando a cero, se tiene

$$0 = 36 - 4y$$

$$4y = 36$$

$$\boxed{y = 9}$$

Pero por (1)

$$x = 36 - 2 \cdot 9 = 18$$

luego

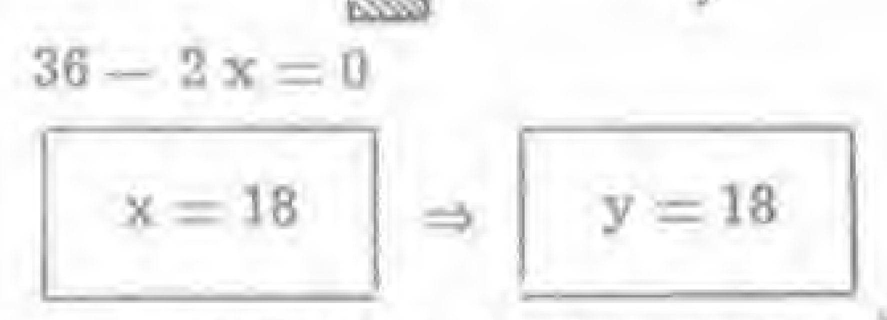
superficie máxima = base × altura

o sea

$$S = 18 \text{ m} \times 9 \text{ m} = 162 \text{ m}^2$$

XX) *Resolver el problema anterior aprovechando un ángulo de una pared:*

$$S = x \cdot y$$



Longitud del alambre = x + y = 36

luego

$$y = 36 - x$$

$$S = x \cdot (36 - x) = 36x - x^2$$

Derivando

$$S' = 36 - 2x$$

Igualando a cero

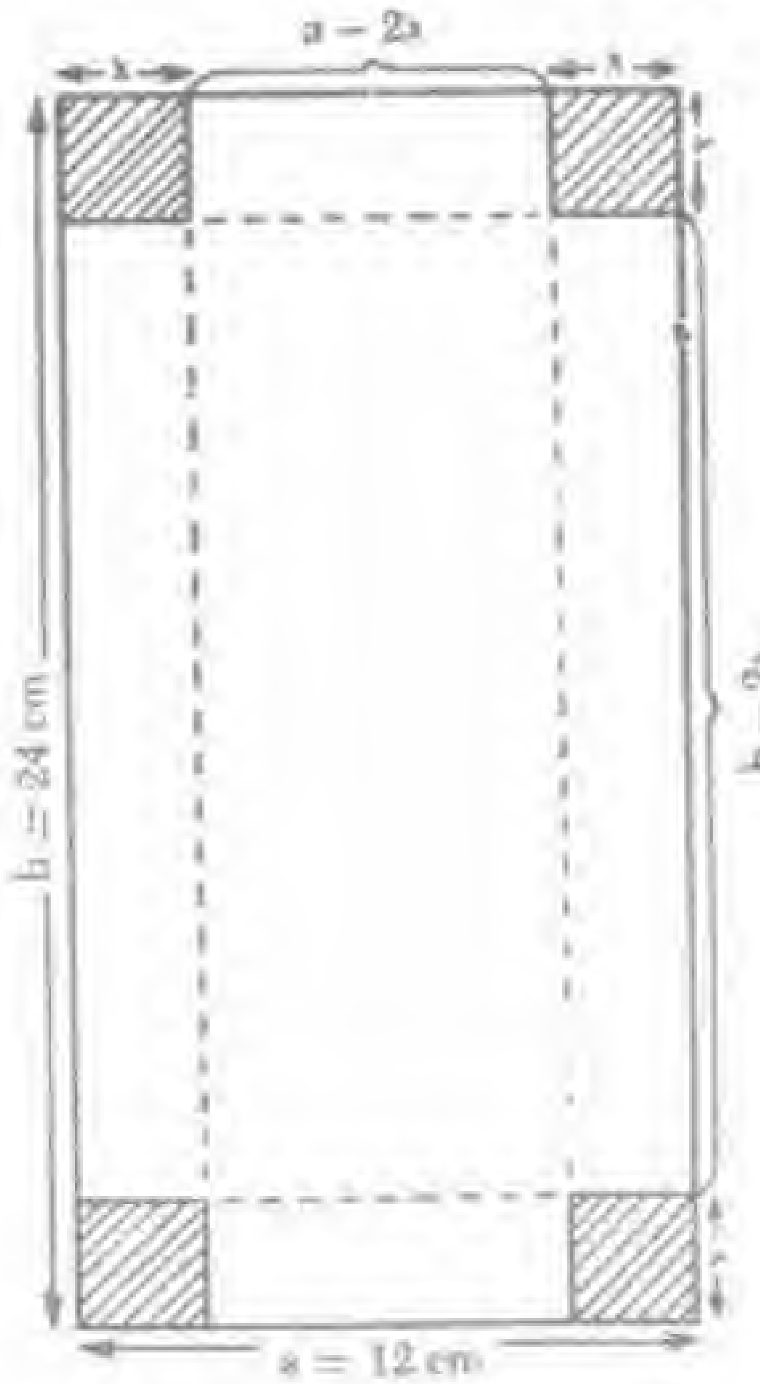
$$36 - 2x = 0$$

Resolviendo

$$\boxed{x = 18} \Rightarrow \boxed{y = 18}$$

XXI) **Problema.** — *Con una cartulina de forma rectangular y lados conocidos, se desea construir una caja de volumen máximo.*

Datos $\begin{cases} a = 12 \text{ cm} \\ b = 24 \text{ cm} \end{cases}$



V = Sup. base × altura

$$V = \underbrace{(a - 2x)}_{\text{lado base}} \cdot \underbrace{(b - 2x)}_{\text{lado base}} \cdot \underbrace{x}_{\text{altura}}$$

$$V = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3$$

Reemplazando por sus valores

$$V = 288x - 24x^2 - 48x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 72x^2 + 288x$$

Derivando e igualando a cero

$$V' = 12x^2 - 144x + 288 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se tiene

$$x_1 \cong 9,4 \qquad \text{(solución absurda)}$$

$$\boxed{x_2 \cong 2,6}$$

luego el volumen *máximo*

$$V = (12 - 5,2) \cdot (24 - 5,2) \cdot 2,6$$

$$V = 332,384 \text{ cm}^3$$

XXII) **Problema tomado de la Estática.** — ***De un tronco circular se ha de aserrar una viga de sección rectangular, de modo que para una longitud dada su resistencia represente un máximo.***

Resist. R = cuadrad. de la anchura × ancho sec. transversal o sea

$$R = h^2 b \qquad (1)$$

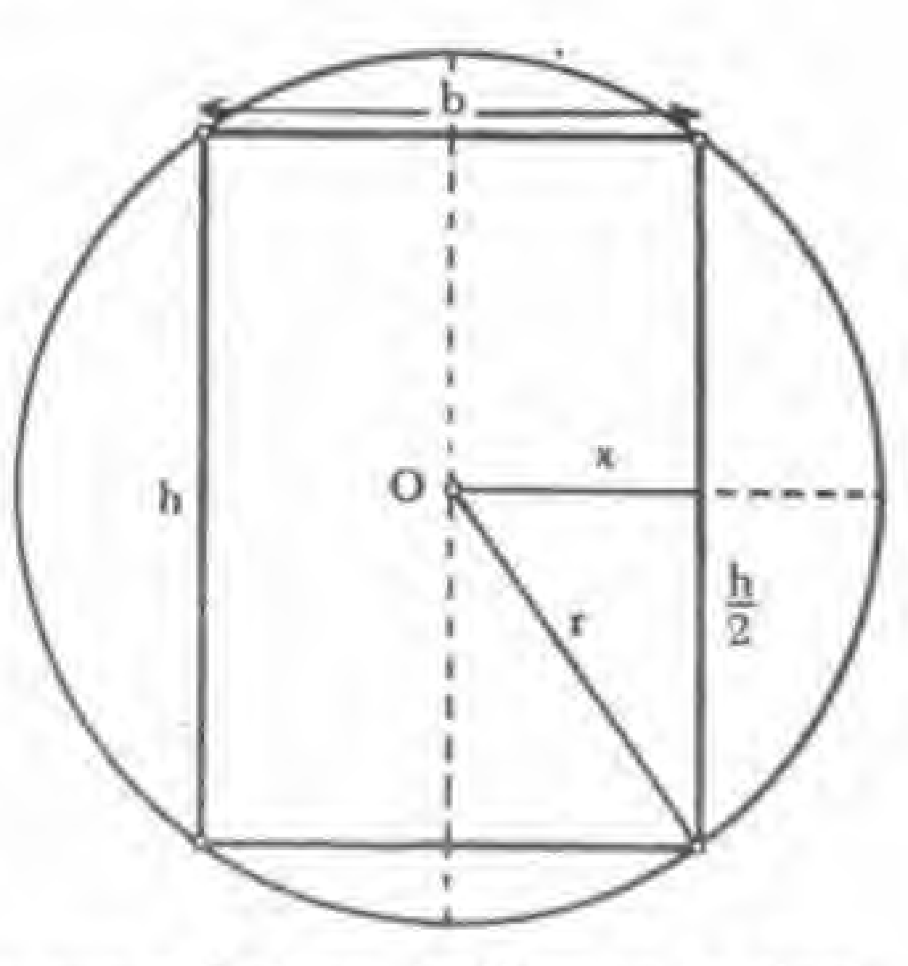
haciendo $\frac{b}{2} = x$, tendremos por Teor. Pitágoras

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$$

$$\frac{h^2}{4} = r^2 - x^2$$

$$h^2 = 4r^2 - 4x^2$$

reemplazando en (1)



se tiene

$$R = (4r^2 - 4x^2)\,2x$$

o bien

$$R = y = 8r^2x - 8x^3$$

Pero como la "*resistencia*" debe ser máxima, hallemos la derivada de la función e igualémosla a cero

$$y' = 8r^2 - 24x^2 = 0$$

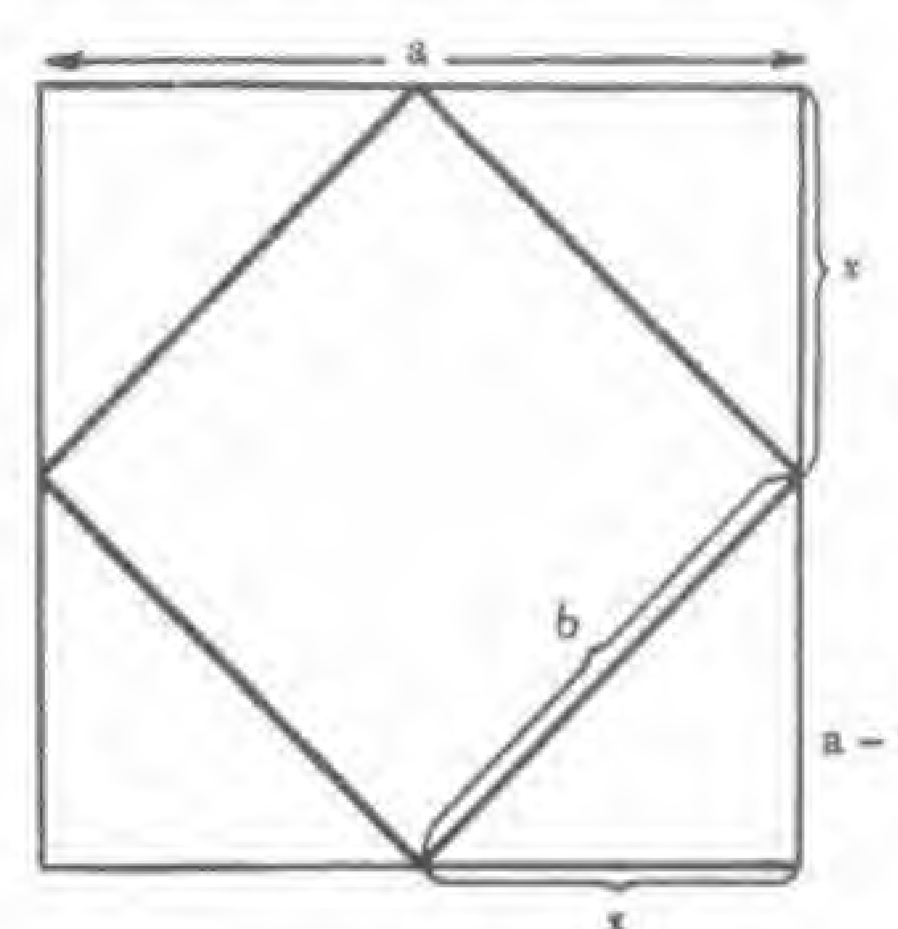
Resolviendo la ecuación, se tiene

$$x = \pm \frac{r}{3}\sqrt{3}$$

Del dibujo surge que la anchura (2 x) puede variar entre (0) y (2 r) y que ambos límites son absurdos, ya que en un caso la viga no tiene anchura y el otro carece de espesor.

Además, como se deben desechar los valores negativos, resulta que la viga presenta una *resistencia máxima* cuando la anchura ($b = 2x$) tiene un valor

$$\left[2 \cdot \frac{r}{3}\sqrt{3}\right]$$



Para un radio r = 0,5 m, resultaría una anchura de viga de 58 cm.

XXIII) **Problema.** — *En un cuadrado se puede inscribir una infinidad de otros cuadrados. ¿Cuál de estos cuadrados es el mínimo?*

$$\text{R.: } x = \frac{a}{2}$$

XXIV) **Problema.** — ***Inscribir en un cuadrado (a²) un cuadrado de superficie mínima. Determinar esta superficie***

$$\text{R.: } \frac{a^2}{2}$$

XXV) **Problema.** — ***Suponiendo que el costo de producción de un cierto artículo está dado por la expresión***

$$C_t = A + Bx + \frac{D}{x}$$

siendo

C_t = *costo total*

A = *gastos fijos*

Bx = *gastos directamente proporcionales*

$\frac{D}{x}$ = *gastos inversamente proporcionales*

hallar la condición para que el costo sea mínimo. El valor (x) que resulta se considera *producción óptima.*

Solución:

Para hallar el *mínimo* se deriva y se iguala a cero:

$$C_t = A + B\,x + \frac{D}{x}$$

$$C'_t = 0 + B - \frac{D}{x^2} = 0$$

$$B - \frac{D}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{D}{B}}$$

Se calcula luego la segunda derivada para establecer si el valor de x corresponde al costo mínimo:

$$C''_t = 2\,D\,x^{-3} = \frac{2\,D}{x^3}$$

Reemplazando (x) por su valor $\sqrt{\frac{D}{B}}$ resulta

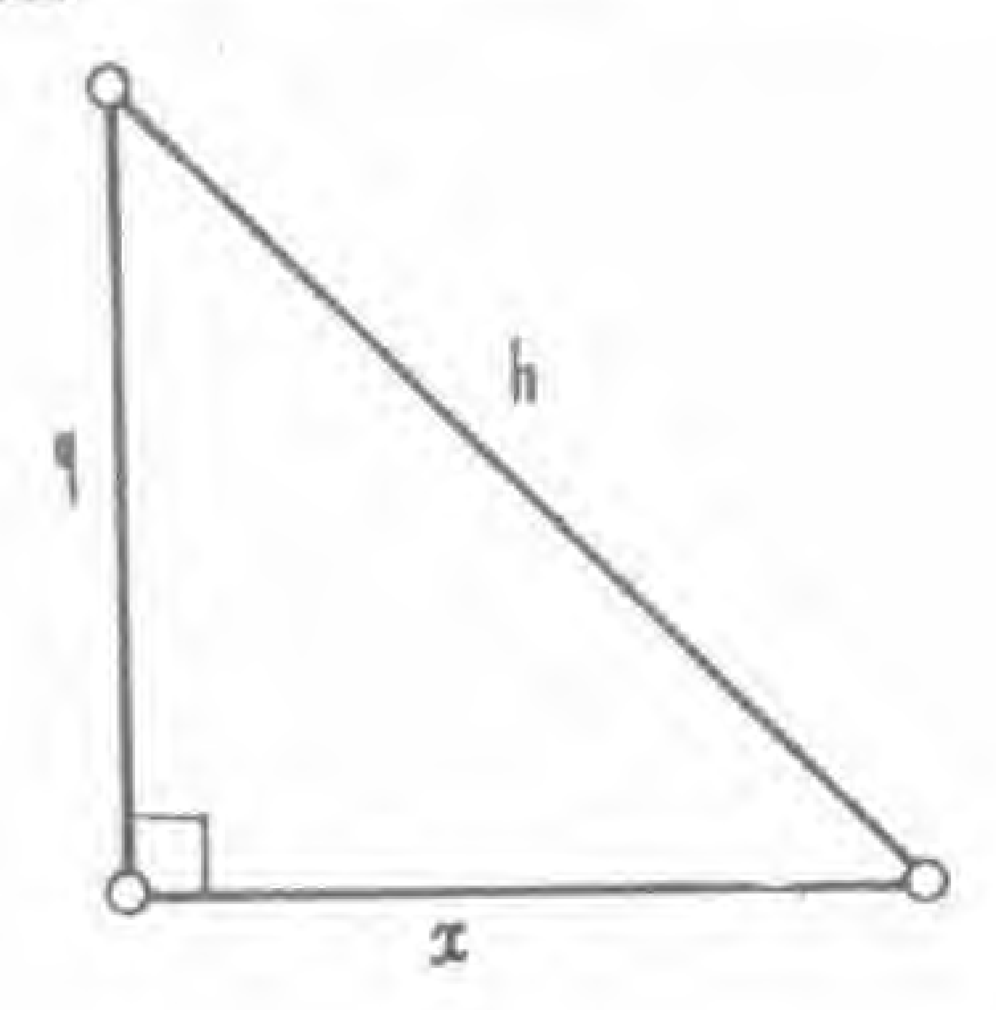
$$C'' = \frac{2\,D}{\left(\sqrt{\frac{D}{B}}\right)^3} = \frac{2\,D}{\frac{\sqrt{D^3}}{\sqrt{B^3}}} = \frac{2\,D\,B\sqrt{B}}{D\sqrt{D}} = \frac{2\,B\sqrt{B}\sqrt{D}}{D}$$

Dado que B y D son cantidades positivas por las condiciones del problema

$$C''_t > 0$$

luego para $x = \sqrt{\frac{D}{B}}$ obtendremos un *costo mínimo.*

XXVI) De todos los triángulos de hipotenusa constante hallar el de área máxima.



$$\text{Area} = \frac{1}{2}\,x\,y$$

pero $y = \sqrt{h^2 - x^2}$ por teorema de Pitágoras

$$\Rightarrow \quad \text{Área} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2\,x^2 - x^4}$$

Llamando (u) al radicando

$$\Rightarrow \quad \text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{u}$$

Derivando

$$A' = \frac{u'}{4\sqrt{u}}$$

pero

$$u = h^2\,x^2 - x^4 \quad \Rightarrow \quad u' = 2\,h^2\,x - 4\,x^3$$

$$\Rightarrow \quad A' = \frac{2\,h^2\,x - 4\,x^3}{4\sqrt{h^2\,x^2 - x^4}}$$

Igualando a cero

$$A' = \textit{Área máxima} = \frac{2\,h^2\,x - 4\,x^3}{4\sqrt{h^2\,x^2 - x^4}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2h^2x - 4x^3 = 0$$

o bien

$$h^2 - 2x^2 = 0$$

de donde

$$x^2 = \frac{h^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Calculando y

$$y = \sqrt{h^2 - x^2} = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Dado que x e y son iguales, el triángulo formado es isósceles y por lo tanto

$$\text{Area} = \frac{1}{2}x \cdot y = \frac{1}{2}x^2$$

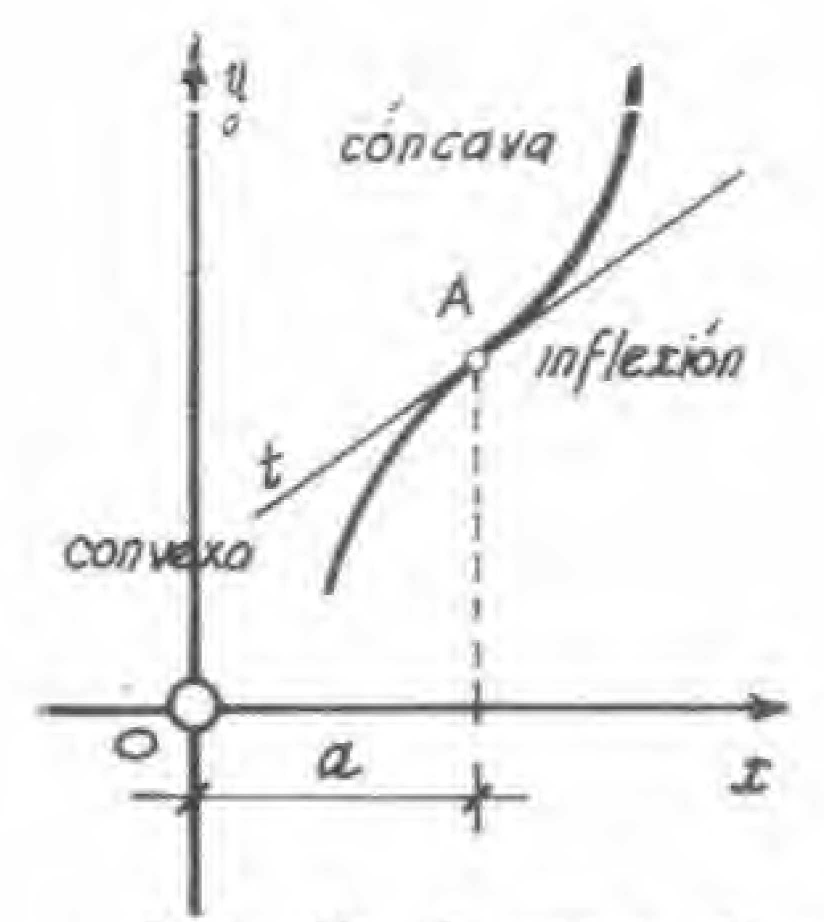
$$\Rightarrow \quad \textit{Área máxima} = \frac{1}{4}h^2$$

INFLEXION

Se dice que una función $y = f(x)$ presenta *inflexión* en un punto cuando la curva correspondiente cruza en dicho punto a la tangente de un lado a otro. El punto, en consecuencia, se define como *punto de inflexión*.

La propiedad más importante de los puntos de inflexión es que en ellos tiene lugar un *cambio de curvatura*, es decir, la curva pasa de convexa a cóncava o viceversa.

Esta propiedad se ilustra en los grabados. En el cambio de curvatura del *primer caso*, al moverse la curva de izquierda a derecha, pasa *de convexa a cóncava*. El punto de inflexión del segundo dibujo señala una transformación en el sentido opuesto, o sea, la curva pasa de cóncava a convexa.



Inflexión Primera clase *Inflexión Segunda clase*

Criterios para los puntos de inflexión.

1º) Las *inflexiones* de la función f (x) sólo pueden aparecer en aquellos puntos donde $f''(x) = 0$.

2º) Cuando $f'''(x)$ es *positiva* en un punto (a) en el que se verifica $f''(a) = 0$, se tiene un *punto de inflexión de la primera clase*, o sea, cambia la curvatura de *convexa a cóncava.*

3º) Cuando $f'''(x)$ es *negativa* en un punto (a) en el que se anula la segunda derivada, $f''(a) = 0$, se tiene un *punto de inflexión de la segunda clase*, es decir, cambia la curvatura de *cóncava a convexa.*

4º) Cuando es $f'''(x) = 0$, en un punto (a), se determina su signo en su entorno; según sea positivo o negativo, el punto de inflexión será de primera o segunda clase, respectivamente.

5º) Si en un punto es $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ habrá una inflexión. Por el contrario si $f'''(a) = 0$ no se puede asegurar que haya punto de inflexión.

EJEMPLOS:

I) Sea

$$y = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x$$
$$y' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6$$
$$y'' = 3x - 6 = 0 \qquad \text{para } x = 2$$
$$y''' = 3 > 0$$

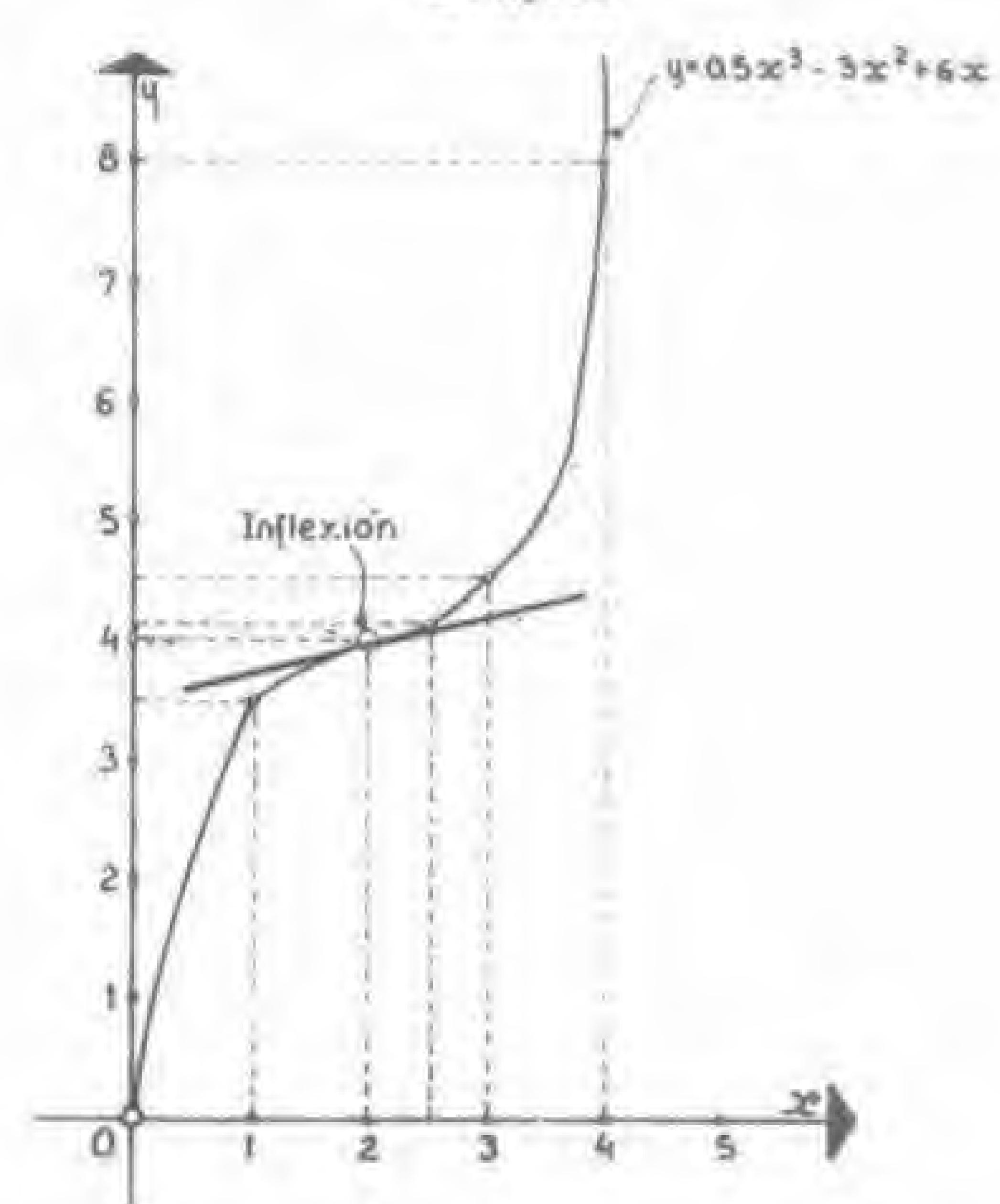
Es decir, existe un punto *inflexión*, cuya curvatura pasa de *convexa* a *cóncava*.

Las coordenadas de este punto de inflexión son (2, 4).

Cuadro de valores

x	0	1	2	2,5	3	4
y	0	3,3	4	4,06	4,5	8





II) $y = x^3 - 3x^2$

R.: Punto inflexión $(1, -2)$

Primera clase de convexa a cóncava

III) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

R.: Punto inflexión $\left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$

Primera clase

IV) $x = (y-2)^3 + 4$

R.: Punto inflexión $(4, 2)$

V) $y = 5x - x^5$

R.: Punto inflexión $(0, 0)$

VI) $y = x^2 [x - 3] + 2x$

R.: Punto inflexión $(1, 0)$

VII) $y = x^3$

R.: Punto inflexión $(0,0)$

Primera clase

VIII) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

R.: Punto de inflexión de la primera clase

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{12}\right)$$

IX) $y = x^4 - x^3$

R.: Punto inflexión, primera clase

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right)$$

Punto inflexión, segunda clase

(0, 0)

X) $y = x^4 - 10x^2 + 9$

R.: **Punto inflexión, primera clase**

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}; -4,9\right)$$

Punto inflexión, segunda clase

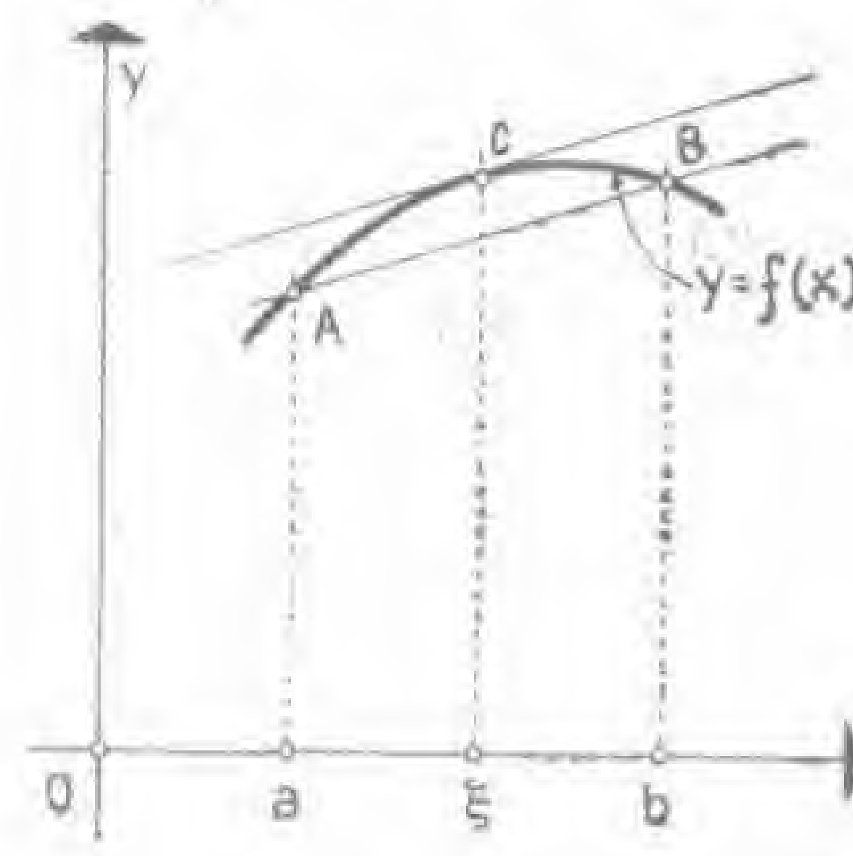
$$\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; -4,9\right)$$

XI) *Determinar la recta tangente de la función del ejercicio III.*

R.: $y = -\dfrac{1}{27}x - \dfrac{8}{27}$

Teorema de Lagrange o del valor medio

Sea una función $y = f(x)$ continua y finita en un cierto intervalo (a) y (b), tal que la derivada sea continua y finita para los puntos de dicho intervalo. La secante $\overline{AB}$ a la curva tendrá un coeficiente angular



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde el numerador representa el incremento de la función (y) y el denominador el incremento de la variable (x).

Entre los puntos A y B de la curva existe otro C tal que la tangente a la misma es paralela a la secante. Sea ξ (letra griega Xi) la abscisa del punto C.

Como los coeficientes angulares de las rectas paralelas son iguales, tendremos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad (1)$$

donde $f'(\xi)$ es el coeficiente angular de la tangente geométrica a la curva en el punto de abscisa (ξ).

Si $\quad b = x + \Delta x$

es $\quad \xi = x + \theta \Delta x \quad$ siempre que $\quad \theta \Delta x < \Delta x$

luego la expresión (1) se puede escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x)$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x)$$

de donde

$$\boxed{\Delta y = \Delta x \cdot f'(x + \theta \Delta x)}$$

o también

$$\boxed{\Delta y = \Delta x \cdot f'(\xi)}$$

Vale decir, que *el incremento de una función es igual al producto del incremento de la variable por la derivada de la función en un punto intermedio.*

Esta propiedad se conoce con el nombre de *Teorema del valor medio o de Lagrange.*

Teorema de Rolle. — *Si una función continua y derivable toma valores iguales en dos puntos, existe al menos un punto intermedio en el cual la derivada se anula.*

En efecto, en el caso particular en el que $f(a) = f(b)$ resulta por el Teorema del valor medio

$$\Delta y = (b - a) \cdot f'(\xi) = 0$$
$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = 0$$

Teorema de Cauchy. — *El cociente de incrementos de dos funciones continuas es igual al cociente de las derivadas correspondientes en un punto interior del intervalo.* (*)

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Teorema de Weierstrass. — *Toda función continúa en un intervalo cerrado [a, b] toma un valor menor que todos los otros (mínimo) y uno mayor que todos los otros (máximo).*

Teorema de Bolzano. — *Si en un intervalo cerrado resultan f(a) y f(b) de signo opuesto, hay un valor (c) interior al intervalo en el cual se anula la función:* $f(c) = 0$.**

* **Intervalo.** Se llama *intervalo cerrado* [a, b] al conjunto de todos los números reales x tales que $x \leq x \leq b$. En cambio se llama *intervalo abierto* (a, b) al conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$.

** Sirve para la resolución aproximada de ecuaciones.

6 BINOMIO DE NEWTON SERIES

La potencia del binomio que estudiaremos recibe el nombre de binomio de Tartaglia, quien lo desarrolló para exponentes enteros. Newton *generalizó* su fórmula para exponentes fraccionarios positivos y fraccionarios negativos.

Vamos a calcular las potencias sucesivas de $(a + b)$ aplicando las reglas de la multiplicación:

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Observando el último desarrollo se advierte que el segundo miembro es un polinomio completo y homogéneo de grado cinco. Ordenado en forma decreciente con respecto a la letra (a) y creciente con respecto a la letra (b), que tiene por coeficientes del primero y último términos al número 1. El *segundo coeficiente* es igual a la fracción $\frac{5}{1}$

que se denomina *número combinatorio* de 5 elementos de orden 1.

El *tercer coeficiente* es igual a la fracción $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ que se denomina *número combinatorio* de 5 elementos de orden 2.

El *cuarto coeficiente* es el *número* combinatorio de 5 elementos de orden 3; $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

El *quinto coeficiente* es el *número combinatorio* de 5 elementos de orden 4; $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$.

Ahora nos proponemos calcular directamente $(a + b)^6$ empleando los números combinatorios para determinar los coeficientes de su desarrollo:

$$(a + b)^6 = a^6 + \frac{6}{1} a^5 b + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4 b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 b^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a b^5 + b^6$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

En general:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n$$

o bien, teniendo en cuenta que

$1 . 2 = 2!$ (se lee *factorial* de 2).

$1 . 2 . 3 = 3!$ (se lee *factorial* de 3).

$1 . 2 . 3 \ldots n = n!$ (se lee *factorial* de n)

resulta

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots + b^n$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *binomio de* Newton y nos dice que: *La potencia ené-sima del binomio* $(a+b)$ *es un polinomio completo, homogéneo de grado* (n), *ordenado con respecto a* (a) *en sentido decreciente, y, por lo tanto, a* (b) *en forma creciente, que tiene por coeficientes del primero y último términos al número 1, y en los restantes términos al número combinatorio de* (n) *elementos de orden uno, de orden dos, etc., o sea el número combinatorio de orden igual al exponente de* (b) *en ese término.*

Ejemplo:

$$(x+z)^7 = x^7 + 7\,x^6\,z + \frac{7\cdot 6}{2!}\,x^5\,z^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\,x^4\,z^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}\,x^3\,z^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!}\,x^2\,z^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6!}\,x\,z^6 + z^7$$

$$(x+z)^7 = x^7 + 7\,x^6\,z + 21\,x^5\,z^2 + 35\,x^4\,z^3 + 35\,x^3\,z^4 + 21\,x^2\,z^5 + 7\,x\,z^6 + z^7$$

Propiedades de los coeficientes. — De la observación de los ejemplos tratados y de la expresión general de la potencia enésima de un binomio, resulta:

1) *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.*

Por lo tanto, sólo es menester calcular los coeficientes de

los primeros términos hasta encontrar uno igual a los anteriores a partir del cual se repiten en orden inverso.

2) *El coeficiente de un término es igual al coeficiente anterior multiplicado por el exponente de* (a) *en ese término y dividido por el de* (b) *aumentado en uno.*

Ejemplo. — Los coeficientes de $(x+z)^7$, son:

$$1\,;\,7\,;\,\frac{7\cdot 6}{2} = 21\,;\,\frac{21\cdot 5}{3} = 35\,;\,\frac{35\cdot 4}{4} = 35\,;\,21\,;\,7\,;\,1$$

Aplicaciones

I) $$(a+2)^6 = a^6 + \frac{6}{1}\,a^5\cdot 2 + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\,a^4\cdot 2^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^3\cdot 2^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,a^2\,2^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a\cdot 2^5 + 2^6$$

$$(a+2)^6 = a^6 + 12\,a^5 + 60\,a^4 + 160\,a^3 + 240\,a^2 + 192\,a + 64$$

II) $$\left(x^2 + \frac{1}{2}\,y\right)^6 = (x^2)^6 + 6\,(x^2)^5\cdot\frac{1}{2}\,y + \frac{6\cdot 5}{2!}\,(x^2)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\,(x^2)^3\left(\frac{1}{2}\,y\right)^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}\,(x^2)^2\left(\frac{1}{2}\,y\right)^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}\,(x^2)\left(\frac{1}{2}\,y\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\,y\right)^6$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\,y\right)^6 = x^{12} + 3\,y\,x^{10} + \frac{15}{4}\,y^2\,x^8 + \frac{5}{2}\,y^3\,x^6 + \frac{15}{16}\,y^4\,x^4 + \frac{3}{16}\,y^5\,x^2 + \frac{1}{64}\,y^6$$

III)

$$(x-1)^9 = x^9 + 9\,x^8\,(-1) + \frac{9\cdot 8}{2!}\,x^7\,(-1)^2 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}\,x^6\,(-1)^3 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!}\,x^5\,(-1)^4 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5!}\,x^4\,(-1)^5 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{6!}\,x^3\,(-1)^6 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7!}\,x^2\,(-1)^7 +$$

$$+\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\,!}\,x\,(-1)^8+(-1)^9$$

$$(x-1)^9=x^9-9\,x^8+36\,x^7-84\,x^6+126\,x^5-126\,x^4+$$
$$+\,84\,x^3-36\,x^2+9\,x-1$$

IV)

$$1{,}2^5=(1+0{,}2)^5=1+1+0{,}4+0{,}08+0{,}008+0{,}00032$$
$$1{,}2^5=2{,}48832$$

V)

$$1{,}5^7=17{,}085.937.5$$

VI)

$$3{,}1^7=2751{,}261.411.1$$

VII)

$$1{,}4^{10}\cong 19{,}88.$$

Binomio de exponente fraccionario o negativo. — El desarrollo de

$$(1+b)^n=1^n+n\,b+\frac{n(n-1)}{2!}\,b^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,b^3+\ldots$$

es *válido* solamente para el valor de (b) comprendido entre (— 1) y (+ 1), cuando (n) es un número entero o fraccionario o inconmensurable.

I) *Exponente fraccionario positivo* $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cuando el exponente no es entero positivo el desarrollo es *una serie*, puesto que no hay ningún factor nulo en los coeficientes.

Ejemplo I:

$$(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}\,x+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2\,!}\,x^2+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3\,!}\,x^3+\ldots$$

$$(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2+\frac{4}{81}\,x^3-\ldots$$

Ejemplo II:

$$\sqrt[3]{1{,}2^2}=(1+0{,}2)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}\,0.2+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2\,!}\,0{,}2^2+$$
$$+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3\,!}\,0{,}2^3+\ldots$$

$$\sqrt[3]{1{,}2^2}\cong 1+0{,}134-0{,}0044+0.000384-\ldots$$

$$\sqrt[3]{1{,}2^2}\cong 1{,}138.784$$

generalmente basta llegar al 4º término para tener una buena aproximación.

II) *Exponente negativo* (— n).

Sea $(1+0{,}2)^{-1}$

Aplicando la ley del binomio, se tiene:

$$(1+0{,}2)^{-1}=1-0{,}2+\frac{-1(-1-1)}{2!}\,0{,}2^2+$$
$$+\frac{-1(-1-1)\,(-1-2)}{3!}\,0{,}2^3+\ldots$$

$$1{,}2^{-1}=1-0{,}2+0{,}04-0{,}008+\ldots$$
$$1{,}2^{-1}\cong 0.832.$$

Sea

$$1{,}6^{-5}=(1+0{,}6)^{-5}=1-5\cdot 0{,}6+\frac{-5\,(-5-1)}{2!}\,0{,}6^2+$$
$$+\frac{-5\,(-5-1)\,(-5-2)}{3!}\,0{,}6^3+\ldots$$

$$1{,}6^{-5}=1-3+5{,}40-7{,}56+\ldots$$
$$1{,}6^{-5}\cong -4{,}16$$

Cálculo de raíces

1) Extraer la raíz cuadrada de 10:

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{9^2}+\ldots\right]$$

$$= 3\left[1+\frac{1}{18}-\frac{\frac{1}{4}}{2}\cdot\frac{1}{81}+\ldots\right]$$

luego

$$\sqrt{10} \cong 3[1+0{,}0556-0{,}0015] = 3{,}1623$$

2) Extraer la raíz cúbica de 9.

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{1+8} = \sqrt[3]{2^3\left|1+\frac{1}{8}\right|} = 2\left[1+\frac{1}{8}\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}+\ldots\right]$$

$$\sqrt[3]{9} \cong 2\,[1+0{,}0417-0{,}0014] = 2{,}0806$$

Calcular

I) El 5º término de $(1,05)^{\frac{1}{6}}$

R.: 0,00818

II) El 4º término de $1,5^{\frac{1}{5}}$

R.: 0,006

III) El 4º término de $1,6^{\frac{4}{5}}$

R.: 0,00691

IV) Desarrollar y calcular hasta el 4º término $(1+0{,}02)^{-4}$

R.: 0,923.84

V) Desarrollar y calcular hasta el 4º término $\sqrt[5]{1,3}$

R.: 1,053.88

VI) El 4º término de $1,5^{-6}$

R.: —15

VII) Desarrollar y calcular hasta el 4º término $\sqrt[3]{1,6}$

R.: 1,173.333

VIII) $(x^2+2y)^6$

R.: $x^{12}+12x^{10}y+60x^8y^2+$
$+160x^6y^3+240x^4y^4+$
$+192x^2y^5+64y^6$

IX) El 4º término de $1,4^{-8}$

R.: —3,584

X) $\left(\frac{3}{4}-a^2\right)^5$

R.: $\frac{243}{1024}-\frac{405}{256}a^2+\frac{135}{32}a^4-$
$-\frac{45}{8}a^6+\frac{15}{4}a^8-a^{10}$

XI) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

R.: $1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{81}x^3-$

XII) $(a+b)^{-\frac{2}{3}}$

R.: $a^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}a^{-\frac{5}{3}}b+\frac{5}{9}a^{-\frac{8}{3}}b^2+\ldots$

XIII) El 4º término de $\sqrt{1,5}$

R.: 0,0078

XIV) Desarrollar y calcular hasta el 4º término $\sqrt[4]{1,4}$

R.: 1,088.5

XV) Desarrollar y calcular hasta el 4º término $\sqrt[4]{1,2}$

R.: 1,046

XVI) $(1+x)^{-1}$

R.: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$

Comprobar este resultado dividiendo

$1 : (1 + x)$

XVII) Extraer la raíz cuadrada de 60 empleando 4 términos del desarrollo

R.: 7,746

SERIES NUMERICAS

Serie. *Definición.* — Dada una sucesión de infinitos números

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

se llama *serie* a la expresión

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

El símbolo u_n se denomina *término general.*

Como se observa, una serie es una suma de infinitos sumandos.

Llamaremos S, suma de la serie, *al límite de la sucesión de sumas parciales de finito número de términos:*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$\Rightarrow \quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

Si este límite es *finito*, la serie se llama *convergente;* si es *infinito*, la serie se denomina *divergente.*

Si carece de límite se dice que la serie es *oscilante;* no tiene una tendencia determinada cuando $n \to \infty$.

Objeto de las series. — Se utilizan para poder efectuar sumas de infinitos sumandos por *medio del paso al límite del término general* u_n. Para ello es necesario que la serie sea convergente.

Series geométricas.

Se denomina *serie geométrica* a aquella serie en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por una constante, llamada *razón.*

En símbolos:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Serie convergente.

Sea

$$S_n = \overbrace{a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}}^{n}$$

La fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es

$$(1) \quad S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{o bien} \quad S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (2)$$

La fórmula (2) se puede escribir

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{a q^n}{1-q}$$

Siempre que sea $-1 < q < 1$ y $n \to \infty$, la potencia q^n tiende a cero. Por consiguiente, en este caso, el segundo término del segundo miembro también tiende a cero, luego

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-q}}$$

En consecuencia, la serie geométrica es *convergente* si

$-1 < q < 1$ siendo la suma igual a $\dfrac{a}{1-q}$

Ejemplos:

a) $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \dfrac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$

b) $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = \dfrac{10}{1 - \frac{1}{10}} = 11\frac{1}{9}$

c) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

d) $1 - 0{,}3 + 0{,}09 - 0{,}027 + \ldots = \dfrac{1}{1-(-0{,}3)} = \frac{10}{13}$

Serie divergente.

La serie geométrica es *divergente* si $q \geq 1$.

Ejemplos:

a) $10 + 100 + 1000 + 10000 + \ldots \to \infty$

b) $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \ldots \to \infty$

c) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \to \infty$

Serie oscilante.

La serie que no tiende a un límite único es *oscilante*. En este caso $q \leq -1$.

Ejemplos:

a) $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1$

S_n vale uno o cero, es decir, la serie *no tiene un límite único*.

b) $10 - 100 + 1000 - 10000 + \ldots$ oscilante

c) $4 - 4 + 4 - 4 + 4 - \ldots$ oscilante

SÍNTESIS

La condición necesaria y suficiente para que una serie geométrica

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots$$

sea *convergente, divergente* u *oscilante*, es la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n \begin{cases} \text{Si } -1 < q < 1 & \text{es } \textit{convergente} \\ \text{Si } \quad q \geq 1 & \text{es } \textit{divergente} \\ \text{Si } \quad q \leq -1 & \text{es } \textit{oscilante} \end{cases}$$

Condición necesaria de convergencia.

Se puede demostrar que en toda serie, geométrica o no, la condición necesaria de convergencia es que el término general tienda a cero.

En símbolos:

$$\boxed{u_n \to 0}$$

cuando

$$n \to \infty$$

Ejemplos:

I) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$
$n\to\infty$

(convergente)

$$u_n=\frac{1}{2^n}\to 0 \text{ (condición necesaria)}$$
$n\to\infty$

II) *La serie armónica*

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\to\infty$$

No obstante cumplirse la condición necesaria de convergencia, pues $\frac{1}{n}\to 0$, cuando $n\to\infty$ la serie tiende a infinito,es decir, es *divergente.*

CRITERIOS DE CONVERGENCIA: D'ALEMBERT, RAABE y CAUCHY

Criterio de D'Alembert.

En una serie de términos positivos

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

se calcula el límite entre un término y el anterior

$$L=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si $L<1$ la serie es *convergente.*

Si $L>1$ la serie es *divergente.*

Si $L=1$ nada puede asegurarse del carácter de la serie, la cual puede ser convergente o divergente. Para determinar lo uno o lo otro debemos recurrir a otros criterios.

Ejemplos:

1) Sea la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Como el término general es $\frac{1}{n!}$, el límite L del cociente de un término al anterior es

$$L=\lim\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\to 0$$
$n\to\infty$

Dado que $L<1$ la serie es *convergente.*

2) En la serie

$$\frac{1!}{100}+\frac{2!}{100^2}+\frac{3!}{100^3}+\ldots$$

el término general es $u_n=\frac{n!}{100^n}$

$$\Rightarrow\ L=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}\cdot\frac{n!}{100^n}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}\cdot\frac{100^n}{n!}=\frac{n+1}{100}\to\infty$$

Como $L>1$ la serie es *divergente.*

3) Sea la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}+$$

donde

$$L=\lim\frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n-1}{2^{n-1}}}=\lim\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n-1)\cdot 2^n}=\lim\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

Dividiendo numerador y denominador por n:

$$L=\lim\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ para } n\to\infty$$

Como $L<1$ la serie es *convergente.*

4) Sea la serie

$$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\dots+\frac{10^n}{n!}+\dots$$

Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{10^n}{n!}=\frac{10^{n+1}\cdot n!}{10^n\cdot(n+1)!}=\frac{10}{n+1}$$

Como $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}<1\Rightarrow$ la serie es *convergente.*

5) En la serie

$$\frac{2}{2^{100}}+\frac{2^2}{3^{100}}+\frac{2^3}{4^{100}}+\dots+\frac{2^n}{(n+1)^{100}}+\dots$$

es

$$\frac{2^n}{(n+1)^{100}}:\frac{2^{n-1}}{n^{100}}=\frac{2\cdot n^{100}}{(n+1)^{100}}=$$

$$=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{100}$$

$$\Rightarrow L=\lim 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{100}=\lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{100}=2>1$$

$\Rightarrow$ la serie es *divergente.*

Ejercicios.

Establecer la convergencia o divergencia de las series:

1) $\frac{3}{3^1}+\frac{4}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\dots+\frac{n+2}{3^n}+\dots$

R.: 1) $u_n=\frac{n+2}{3^n}$ convergente

2) $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\dots$

2) $u_n=\frac{n!}{1.3.5\dots(2n-1)}$; convergente

3) $\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots$

3) $u_n=\frac{3}{2^n}$ convergente

4) $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\dots$

4) $u_n=\frac{2^n}{3^n}$; convergente

5) $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3}+\dots$

5) $u_n=\frac{2^n}{3}$ divergente

6) $\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\dots$

6) $u_n=\frac{2^n}{n!}$; convergente

7) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\dots$

7) $u_n=\frac{1}{(2n+1)!}$; convergente

8) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots$

8) $u_n=\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$; $L=1$

como el límite es *uno*, no está definido el tipo de serie.

9) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\dots$

9) $u_n=\frac{1}{2^n-1}$; convergente

10) $\frac{2!}{1000}+\frac{3!}{1000^2}+\frac{4!}{1000^3}+\dots$

10) $u_n=\frac{(n+1)!}{1000^n}$; divergente

11) $\frac{2}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{2}{5!}+\dots$

11) $u_n=\frac{2}{(2n-1)!}$; convergente

Criterio de Raabe.

Cuando el cociente de un término al anterior tiende a uno, se resta dicho cociente de la unidad y la diferencia se multiplica por n.

Según que resulte

$$R=\lim n\cdot\left[1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]\begin{cases}>1 \text{ la serie es \textit{convergente}}\\ <1 \text{ la serie es \textit{divergente}}\end{cases}$$

Ejemplos:

1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n-1)^2}=\frac{(n-1)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{n^2-2n+1}{n^2}=1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\to 1 \text{ cuando } n\to\infty$$

Aplicando el criterio de Raabe se resta este trinomio de *uno* y se multiplica luego por n:

$$R=\lim n\cdot\left[\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{1}{n}\right]=2>1$$

$\Rightarrow$ la serie es *convergente.*

2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\dots$

$$n\cdot\left[1-\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n-1)n}}\right]=n\cdot\left[1-\frac{n-1}{n+1}\right]=n\cdot\left[\frac{2}{n+1}\right]$$

$$=n\cdot\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2>1$$

$\Rightarrow$ la serie es *convergente.*

3) $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots.2n}+\dots$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} : \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} =$$

$$= \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Aplicando el criterio de Raabe.

$$R = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right] = \lim n \cdot \left[\frac{1}{2n}\right]$$

$$= \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie es *divergente.*

4) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{5.6} +$

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

$R = 2$; convergente (Raabe)

5) $\dfrac{1}{2^2-2} + \dfrac{1}{3^2-2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2-2} + \dfrac{1}{(n+1)^2-2} + \ldots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)^2-2} : \frac{1}{n^2-2} = \frac{n^2-2}{n^2+2n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Rightarrow R = \lim n \cdot \left[1 - \frac{n^2-2}{n^2+2n-1}\right] = \lim \frac{2n^2+n}{n^2+2n-1} = 2$$

$\Rightarrow$ la serie es *convergente.*

6) $\dfrac{1}{2^2-h} + \dfrac{1}{3^2-h} + \dfrac{1}{4^2-h} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2-h}$$

$R = 2$; convergente (Raabe)

Criterio de Cauchy.

En una serie de términos positivos se calcula el valor de la expresión

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

Según que resulte

$$L \left| \begin{array}{l} < 1 \text{ la serie es } \textit{convergente} \\ > 1 \text{ la serie es } \textit{divergente} \\ = 1 \text{ el criterio no es aplicable.} \end{array} \right.$$

Ejemplos:

1) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^4} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} + \ldots$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0 < 1 \text{ serie convergente}$$

2) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^4} +$

$+ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^5} + \ldots + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^n} + \ldots$

$$L = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}} = \lim \frac{1}{2\sqrt[n]{2}} = \lim \frac{1}{2\cdot 2^{\frac{1}{n}}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\cdot 2^0} = \frac{1}{2} < 1 \text{ serie convergente}$$

3)

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{1} + \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{n}\right)^n + \ldots$$

$$L = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{n}\right)^n} = \lim \frac{\text{sen}\,\alpha}{n} = 0 < 1 \text{ serie convergente}$$

4) $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^3 + \left(\dfrac{4}{9}\right)^4 + \ldots + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

CRITERIOS DE COMPARACIÓN

I) Convergencia.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente menores o iguales que los de otra serie de términos positivos que se sabe que es *convergente*, la primera también es *convergente*.

Ejemplos:

1) *Averiguar el carácter de la serie*

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Tomaremos como *serie patrón* a la serie geométrica

$$Sp = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Como los términos homólogos de la serie patrón son iguales o mayores que los de la otra serie, resulta

$S < Sp \Rightarrow S$ es *convergente*

porque la serie patrón es convergente, ya que su razón es menor que la unidad.

2) ***Averiguar el carácter de la serie que define al número e.***

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Se compara con la *serie patrón*

$$Sp = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots$$

Se observa que los términos homólogos de la serie patrón, de razón $q = \frac{1}{2}$, son iguales o mayores que los de la otra serie, luego

$$e < Sp \Rightarrow e \text{ es convergente}$$

II) Divergencia.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente mayores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es *divergente*, la primera serie es también *divergente*.

Ejemplo:

Estudiar la serie armónica

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Se elige como patrón una serie conocida

$$Sp = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

donde cada paréntesis es igual a $\frac{1}{2}$.

Se introducen paréntesis en la serie armónica para homologar términos.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Se observa que los términos de la serie armónica son mayores o iguales que los de la serie patrón. Como la serie patrón es evidentemente divergente, también lo es la serie armónica.

Con símbolos

$S > Sp$ pero Sp divergente

$\Rightarrow$ S divergente

Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin (*)

Sea una función

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

de variable (x) y de grado (n).

Nos proponemos establecer las relaciones entre los *coeficientes* del polinomio y las *derivadas* sucesivas de f (x).

Incrementando (x), en un valor (h), resulta

$$f(x+h) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \\ + a_2 (x+h)^{n-2} + \ldots + a_n$$

x — h — $x + h$ (gráfico I)

Aplicando la ley del binomio a cada término y ordenando con respecto a (h), se obtiene:

$$f(x+h) = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) + \\ + [a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \\ + a_2 (n-2) x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}] h + \\ + [a_0 n (n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3} + \ldots + \\ + a_{n-2}] \frac{h^2}{2!} +$$

(*) *Taylor* (Brook). Matemático inglés. En Cambridge entabló relaciones con los principales discípulos de Newton y se dio a conocer por algunas *Memorias* de gran importancia, entre ellas *Methodus incrementorum directa et inversa*. Fue nombrado secretario de la Sociedad Real de Londres.

(*) *Mac Laurin* (Colin). Matemático escocés. A los 19 años de edad obtuvo una Cátedra de Matemática en Aberdeen, de donde por mediación deNewton, fue llamado a la Universidad de Edimburgo. Sus obras más notables son: *Geometría Orgánica y Treatise on fluxions*.

$$+ [a_0 n (n-1)(n-2) x^{n-3} + \\ + a_1 (n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4} + \ldots + a_{n-3}] \frac{h^3}{3!} +$$

Se observa en este desarrollo que el primer término es igual a la función dada f (x); que (h) es el coeficiente del primer corchete que es la *derivada* primera $f'(x)$ de (y); que $\frac{h^2}{2!}$ es el coeficiente del segundo corchete, que es la *derivada segunda* $f''(x)$ de (y), que $\frac{h^3}{3!}$ multiplica a $f'''(x)$ y así sucesivamente, luego

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x)$$

Si se reemplaza (x) por (h), ver gráfico I, y viceversa, queda

$$f(x+h) = f(h) + x f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x).$$

El significado de la fórmula de Taylor es el siguiente: conociendo los valores del polinomio f (x) y de sus derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, ... para un *valor h de la variable*, se puede calcular el valor del mismo polinomio para el valor $(x+h)$.

h — x — $x + h$

Gráfico II

Si se reemplaza el extremo $(h + x)$ del gráfico II por (x) y el extremo (h) por (a), el intervalo (x) será $(x - a)$, como se observa en el gráfico III:

a — $x - a$ — x

Gráfico III

se obtendrá la fórmula de Taylor expresada de otra manera, la cual puede ser más útil:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Cuando en la fórmula de Taylor hacemos h = 0, resulta:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0)$$

que es la fórmula de *Mac Laurin.*

Obsérvese, que los *coeficientes* son los valores de las *derivadas sucesivas* para h = 0, divididas por los factoriales correspondientes.

Aplicación de la fórmula de Taylor

I) Sea

$$f(x) = 5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 3$$

Se desea calcular el valor de dicho polinomio para un entorno del punto $a = -1$.

Se tiene

$$f(x+1) = f(1) + (x+1) f'(1) + \frac{(x+1)^2}{2!} f''(1) + \dots + \frac{(x+1)^4}{4!} f^{IV}(1) \qquad (1)$$

pero

$f(x) = 5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 3$ luego $f(1) = 11$
$f'(x) = 20x^3 + 9x^2 + 2x - 1$ luego $f'(1) = 30$
$f''(x) = 60x^2 + 18x + 2$ luego $f''(1) = 80$
$f'''(x) = 120x + 18$ luego $f'''(1) = 138$
$f^{IV}(x) = 120$ luego $f^{IV}(1) = 120$

por lo tanto,

$$f(x+1) = 11 + 30x + 40x^2 + 23x^3 + 5x^4$$

II) Encontrar el valor del polinomio para un entorno del punto $a = 2$.

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f(2) = 20$
$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow f'(2) = 39$
$f''(x) = 24x^2 - 18x + 8 \Rightarrow f''(2) = 68$
$f'''(x) = 48x - 18 \Rightarrow f'''(2) = 78$
$f^{IV}(x) = 48 \Rightarrow f^{IV}(2) = 48$

Por lo tanto

$$f(x-2) = \frac{48}{4!} \cdot (x-2)^4 + \frac{78}{3!} \cdot (x-2)^3 + \frac{68}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{39}{1!} \cdot (x-2) + 20$$

$$f(x-2) = 2 \cdot (x-2)^4 + 13 \cdot (x-2)^3 + 34 \cdot (x-2)^2 + 39 \cdot (x-2) + 20$$

Generalización de las fórmulas de Taylor y de Mac Laurin. (Expresión del Resto.)

Las fórmulas de Taylor y de Mac Laurin determinadas para funciones enteras son válidas para funciones *finitas* y continuas en un cierto entorno.

La *expresión de Taylor generalizada* es

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \theta h)$$

que da el valor de la función en el punto $(x + h)$, conocidos el de la función y sus derivadas en el punto (x).

El último término del desarrollo

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \theta h) = R_n(x)$$

recibe el nombre de *resto* y expresa la diferencia entre $f(x+h)$ y $f(x)$, siendo (θ) una fracción positiva.

Este resto $R_n(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande.

Si para un cierto valor de (x), $R_n(x) \to 0$ al tender $n \to \infty$, la *serie* será *convergente*, y tendremos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots \text{ (hasta } \infty)$$

Por otra parte, si $R_n(x)$ *no tiende a cero*, la serie obtenida *no será convergente* y no podrá desarrollarse en serie $f(x+h)$.

Al introducir (h), se desea efectuar la operación de paso al límite, pues se acostumbra a emplear (h) para ello y en muchos casos de límite es interesante encontrar la derivada.

Análogamente se obtiene la fórmula generalizada de MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{n+1}(\theta x)$$

Cuando

$$n \to \infty \text{ el } \textit{resto } \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x) \to 0$$

luego el valor de $f(x)$ con la aproximación que se desea es

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots \text{ (hasta el } \infty)$$

Ejemplos de desarrollo en serie de funciones

I) Sea

$$y = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 3$$

Aplicando la fórmula de Mac Laurin para determinar el valor del polinomio en un punto (x), conociendo su valor y el de las sucesivas derivadas en el punto 0, se tiene

$f(0) = 3$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = -12$

$f'''(0) = +6$

$f^{IV}(0) = -48$

$f^{V}(0) = 360$

Hallamos el valor de dicho polinomio en cualquier punto, aplicando la fórmula

$$f(x) = 3 + \frac{1}{1!} x + \frac{-12}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3 + \frac{-48}{4!} x^4 + \frac{360}{5!} x^5$$

$$f(x) = +3 + x - 6x^2 + x^3 - 2x^4 + 3x^5$$

El valor del polinomio en el punto $x = 1$

$$f(1) = +3 + 1 - 6 + 1 - 2 + 3 = 0$$

II) *Serie exponencial:*

$$f(x) = e^x$$

Desarrollo.

Calculemos las derivadas de la misma en el punto $x = 0$:

$f(x) = e^x$	luego	$f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x$	"	$f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$	"	$f''(0) = 1$
$f'''(x) = e^x$	"	$f'''(0) = 1$

En consecuencia, su desarrollo es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

III) *Desarrollar la función* (e).

En el ejemplo anterior hacemos

$x = 1$, resulta

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e = 2{,}7182\dots$$

IV) *Desarrollo de* **sen x.**

Derivadas sucesivas:

$f\ (x) =$	$\operatorname{sen} x$	luego	$f\ (0) = 0$
$f'\ (x) =$	$\cos x$	,,	$f'\ (0) = 1$
$f''\ (x) =$	$-\operatorname{sen} x$	,,	$f''\ (0) = 0$
$f'''\ (x) =$	$-\cos x$	,,	$f'''\ (0) = -1$
$f^{IV}\ (x) =$	$\operatorname{sen} x$	,,	$f^{IV}\ (0) = 0$
$f^{V}\ (x) =$	$\cos x$	,,	$f^{V}\ (0) = 1$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots$$

lo cual es válido para cualquier valor de x.

V) *Desarrollo de* cos x.

Derivadas sucesivas:

$f\ (x) =$	$\cos x$	luego	$f\ (0) = 1$
$f'\ (x) =$	$-\operatorname{sen} x$	,,	$f'\ (0) = 0$
$f''\ (x) =$	$-\cos x$	,,	$f''\ (0) = -1$
$f'''\ (x) =$	$\operatorname{sen} x$	,,	$f'''\ (0) = 0$
$f^{IV}\ (x) =$	$\cos x$	,,	$f^{IV}\ (0) = 1$
$f^{V}\ (x) =$	$-\operatorname{sen} x$	,,	$f^{V}\ (0) = 0$
$f^{VI}\ (x) =$	$-\cos x$	,,	$f^{VI}\ (0) = -1$

por lo tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

VI) *Serie binómica:*

Sea

$$f(x) = (1 + x)^n$$

Desarrollo.

Derivadas sucesivas:

$f\ (x) = (1 + x)^n$

luego $f\ (0) = 1$

$f'\ (x) = n\,(1 + x)^{n-1}$

$\Rightarrow\ f'\ (0) = n$

$f''\ (x) = n\,(n - 1)\,(1 + x)^{n-2}$

$\Rightarrow\ f''\ (0) = n\,(n - 1)$

$f'''\ (x) = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(1 + x)^{n-3}$

$\Rightarrow\ f'''\ (0) = n\,(n - 1)\,(n - 2)$

$f^{IV}\ (x) = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(1 + x)^{n-4}$

$\Rightarrow\ f^{IV}\ (0) = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)$

por lo tanto,

$$(1 + x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \frac{n\,(n - 1\,(n - 2)\,(n - 3)}{4!} x^4 + \dots$$

lo cual es válido para cualquier valor de (x) comprendido entre (— 1) y (+ 1).

VII) ***Desarrollar aplicando la fórmula de Mac Laurin.***

$$\mathbf{f\,(x) = \log_e (1 + x)}$$

Téngase en cuenta que la función $f(x) = \log_e (1 + x)$ y sus derivadas sucesivas en $x = 0$ *no son discontinuas*, luego

$$f(x) = \log_e (1 + x) \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = \log_e (1 + 0) = 0$$

$f\ (x) = \log_e (1 + x)$	$\Rightarrow\ f\ (0) = \log_e 1 = 0$
$f'\ (x) = \dfrac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}$	$\Rightarrow\ f'\ (0) = 1$
$f''\ (x) = (-1) \cdot (1 + x)^{-2}$	$\Rightarrow\ f''\ (0) = -1$
$f'''(x) = (-1)\,(-2)\,(1 + x)^{-3}$	$\Rightarrow\ f'''\ (0) = 2$
$f^{IV}(x) = -6\,(1 + x)^{-4}$	$\Rightarrow\ f^{IV}(0) = -6$

R.: $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$

Si $x = 1$ la serie es alternada convergente:

$$y = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 0{,}6931\ldots$$

VIII) *Desarrollar:*

$$y = f(x) = \operatorname{tg} x$$

Téngase en cuenta que

$$y = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad y'_0 = 1 \ ; \ \text{etc.}$$

$$\text{R.:} \ \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{3\,.\,5} + \ldots$$

IX) *Desarrollar:*

$$y = f(x) = a^x$$

Téngase en cuenta que

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \ln a$$

$$f''(x) = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \ln^2 a$$

$$\text{R.:} \ 1 + \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + \frac{x^3}{3!}\ln^3 a + \frac{x^4}{4!}\ln^4 a + .$$

X) *Desarrollar:*

$$f(x) = e^x \qquad \text{para} \qquad x = -1$$

$$\text{R.:} \ e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$$

XI) *Desarrollar:*

$$y = e^{ix} \qquad\qquad y = e^{-ix}$$

$$\text{R.:} \begin{cases} e^{ix} = 1 + \dfrac{i\,x}{1} - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{i\,x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{i\,x^5}{5!} - \dfrac{x^6}{6!} - \ldots \quad (I) \\ e^{-ix} = 1 - \dfrac{i\,x}{1} - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{i\,x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{i\,x^5}{5!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \quad (II) \end{cases}$$

XII) Desarrollar la siguiente función por Mac Laurin

$$y = f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1$$

$$\text{R.:} \ x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

XIII) Calcular la función anterior para $n = 6 \, ; x = 0{,}1$

$$\text{R}\,.\ \left(1 + \frac{0{,}1}{6}\right)^6 - 1 = 0{,}1 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\frac{0{,}1^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{6}\right)\frac{0{,}1^3}{3!} + \ldots$$

$$\cong 0{,}10425$$

XIV) Aplicando la fórmula de Mac Laurin para $\ln(x + 1)$ calcular $\ln 1{,}5$

R.: $\sim 0{,}405$

Fórmulas de Euler

Sumando y restando las relaciones I y II del ejercicio XI, tendremos

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right] = 2\cos x \quad (III)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\,i\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right] = 2\,i \operatorname{sen} x \quad (IV)$$

De la fórmula III resulta

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

De la fórmula IV resulta

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}$$

Estas expresiones reducen los senos y cosenos reales a exponenciales complejas.

Aplicación de la fórmula de Taylor para calcular cos 50°.

Desarrollar $\cos x$ para $a = \frac{\pi}{4}$.

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = 0{,}7071 \cdot \left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\right] \qquad (1)$$

Para comprobar este resultado vamos a *calcular cos 50°*.

Como $x = 50°$ es $x - \frac{\pi}{4} = 5° = 0.08727$ radianes.

Por lo tanto:

$$x - \frac{\pi}{4} = 0{,}08727 \; ; \; \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}00762 \; ; \; \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 0{,}00066 \; ; \text{ etc.}$$

Reemplazando en (1), resulta:

$$\cos 50° = 0{,}64278$$

Consultando la tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas, se tiene:

$$\cos 50° = 0{,}64279$$

INTEGRAL INDEFINIDA 7

Considerando el cálculo de la derivada o de la diferencial como una *operación directa*, nos queda ahora tratar la *operación inversa*, llamada *integral indefinida:* dada una función, determinar aquella de la cual es derivada, o geométricamente, dadas las pendientes de una curva, determinar ésta.

Sea la función F (x).

Si a la diferencial de F (x) la designamos por f (x) · d x, se tiene

$$d\,F(x) = f(x) \cdot d\,x$$

Por ello a F (x) la llamaremos *función primitiva.*

A la operación inversa de la diferencial la hemos denominado *integral indefinida* y la representamos por

$$\int f(x)\,dx$$

que se lee "integral de (f) de (x) diferencial (x)".

Luego

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

o bien

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

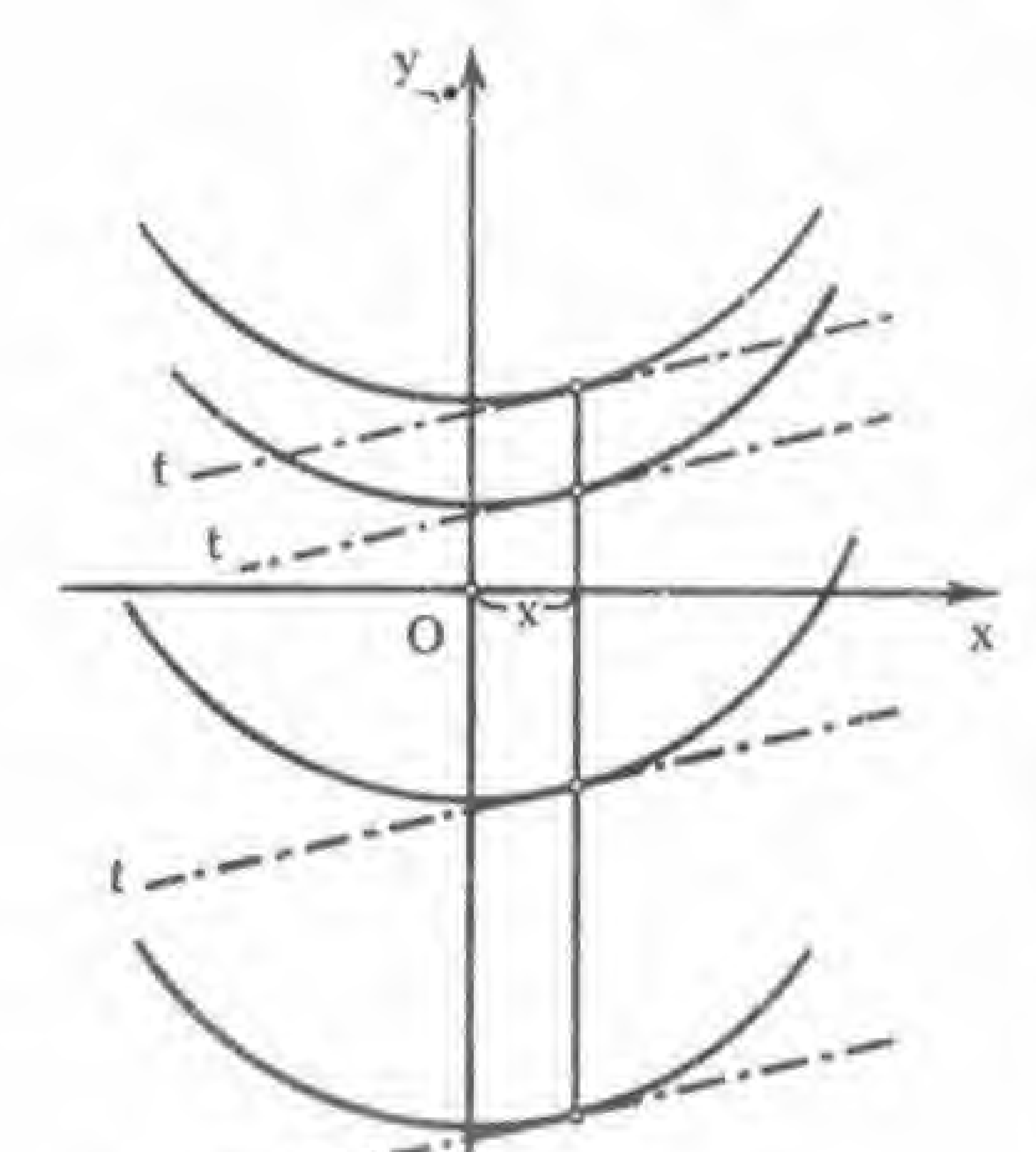
Esta expresión muestra que el signo ∫ destruye al signo (d) si se agrega una constante a la función, llamada *constante de integración*, que analizaremos en el artículo siguiente.

La constante de la función primitiva. — Sabemos que las funciones que difieren en una constante tienen la misma diferencial.

Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad ; \quad y = \frac{3}{2}x^2 - 7 \quad ; \quad y = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 8, \text{ etc.}$$



tienen como diferencial

$$d\,y = 3\,x\,d\,x$$

Por tanto, si queremos reconstruir la función primitiva cuya diferencial es $(3\,x\,d\,x)$ debemos integrar, pero nos encontramos con que no podemos afirmar cuál de las constantes corresponde a nuestro caso.

Resolvemos esta cuestión indicando la constante con una letra (C) que la deja sin determinación.

Con símbolos:

$$\int 3\,x\,d\,x = \frac{3}{2}x^2 + C$$

o sea

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + C$$

Dado que la constante de integración (C) queda indeterminada no se puede precisar la colocación de la función o curva calculada por la integral, ya que como en el caso de la figura, puede estar situada en distintos lugares del plano, cuyas ordenadas difieran en una constante.

En resumen, se obtiene un *haz de curvas, familia, todas de la misma forma, por tener sus tangentes paralelas, o sea de igual pendiente* $f'(x)$.

Procedimiento de integración. — Depende mucho de la práctica, de la experiencia, y de la profundidad de conocimiento que se posea sobre cálculo diferencial, la facilidad con que se pueda realizar la operación de integración.

Daremos aquí algunas formas de integración, que permitirán resolver muchos tipos de ejercicios, pero para llegar a buen fin es indispensable contar con las condiciones expresadas en el párrafo anterior.

Integración inmediata. — Cuando se nos presenta un ejercicio en el que se desea integrar una expresión que conocemos como diferencial de una función, la resolución es *inmediata.*

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x}\,d\,x = ln\,x + C$$

pues

$$d\,ln\,x = \frac{1}{x}\,d\,x$$

Resulta, pues, indispensable repasar las diferenciales más comunes, las que escribiremos en columna y agregaremos en una segunda columna las integrales correspondientes:

$$d(\log x) = \frac{1}{x} \log e \, dx$$

$$\int \frac{1}{x} \log e \, dx = \log x + C$$

$$d(ln\, x) = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + C$$

$$d(a^x) = a^x \, ln\, a \, dx$$

$$\int a^x \, ln\, a \, dx = a^x + C$$

$$d(e^x) = e^x \, dx$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$d(x^m) = m\, x^{m-1} \, dx$$

$$\int m\, x^{m-1} \, dx = x^m + C$$

$$d(\text{sen}\, x) = \cos x \, dx$$

$$\int \cos x \, dx = \text{sen}\, x + C$$

$$d(\cos x) = -\text{sen}\, x \, dx$$

$$\int -\text{sen}\, x \, dx = \cos x + C$$

$$d(\text{tg}\, x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$$

$$d(\text{cotg}\, x) = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} \cdot dx$$

$$\int -\frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cotg}\, x + C$$

$$d(\sec x) = \text{tg}\, x \sec x \, dx$$

$$\int \text{tg}\, x \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$d(\text{cosec}\, x) = -\text{cotg}\, x \,\text{cosec}\, x \, dx$$

$$\int -\text{cotg}\, x \,\text{cosec}\, x \, dx = \text{cosec}\, x + C$$

$$d(\text{arc sen}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc sen}\, x + C$$

$$d(\text{arc cos}\, x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc cos}\, x + C$$

$$d(\text{arc tg}\, x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc tg}\, x + C$$

$$d(\text{arc cotg}\, x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc cotg}\, x + C$$

$$d(\text{arc sec}\, x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arc sec}\, x + C$$

$$d(\text{arc cosec}\, x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arc cosec}\, x + C$$

Propiedades de las integrales. — De las propiedades de la diferenciación, análogas a las de derivación, se infieren inmediatamente sus correspondientes en las integrales.

—*La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada función.*

$$\int (3x^2\,dx + x\,dx + dx) = \int 3x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

y en general

$$\int [d f_1(x) + d f_2(x) + d f_3(x)] = \int d f_1(x) + \int d f_2(x) + \int d f_3(x)$$

—*La integral del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la integral de la función.*

$$\int \frac{3\,dx}{x} = \int 3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3 \cdot \ln x + C$$

—*La integral de una potencia de la variable se obtiene aumentando en una unidad el exponente de la variable y dividiendo por el nuevo exponente:*

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Integración por sustitución. — En los casos en que la integración no sea inmediata conviene ensayar el reemplazo de una parte de la expresión por una nueva variable; se determina luego la diferencial de esta variable. Por último se despeja la diferencial y se sustituye en la integral propuesta.

Sea

$$\int \frac{dx}{a - bx} \qquad (1)$$

Haciendo

$$a - bx = z$$

resulta

$$dz = -b\,dx$$

despejando (dx)

$$dx = -\frac{dz}{b}$$

Sustituyendo en (1), se obtiene

$$\int \frac{dx}{a - bx} = \int \frac{\frac{-dz}{b}}{z} = \int -\frac{dz}{bz}$$

o bien

$$\int \frac{dx}{a - bx} = -\frac{1}{b}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{b}\ln z + C$$

finalmente

$$\int \frac{dx}{a - bx} = -\frac{1}{b}\ln(a - bx) + C$$

Ejercicios de aplicación

1) *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m}$$

Haciendo

$$x - a = z \qquad \text{es} \qquad dx = dz$$

de donde

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{dz}{z^m} = \int z^{-m}\,dz = \frac{z^{-m+1}}{-m+1} + C$$

o bien

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{1-m}}{1-m} + C$$

2) *Calcular:*

$$\int (a + bx^m)^p \cdot x^{m-1}\,dx \qquad (1)$$

Haciendo

$$a + bx^m = z \qquad \text{es} \qquad b\,m\,x^{m-1}\,dx = dz$$

de donde

$$dx = \frac{dz}{b\,m\,x^{m-1}}$$

reemplazando en (1)

$$\int (a + b x^m)^p x^{m-1} d x = \int z^p x^{m-1} \frac{d z}{b m x^{m-1}}$$

$$= \int z^p \cdot \frac{d z}{b m} = \frac{1}{b m} \int z^p d z$$

$$= \frac{1}{b m} \cdot \frac{z^{p+1}}{p+1} + C$$

luego

$$\int (a + b x^m)^p x^{m-1} d x = \frac{1}{b m} \cdot \frac{(a + b x^m)^{p+1}}{p+1} + C$$

3) Calcular:

$$I = \int \frac{d x}{x \, ln \, x}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{x}}{ln \, x} d x \qquad (1)$$

haciendo

$$z = ln \, x$$

$$d z = \frac{1}{x} d x$$

$$\Rightarrow \qquad d x = x \, d z$$

Reemplazando en (1) se tiene

$$I = \int \frac{\frac{1}{x} \cdot x \cdot d z}{z}$$

$$I = \int \frac{d z}{z}$$

$$I = ln \, z + C$$

$$I = ln \, [\, ln \, x \,] + C$$

4) $\int \frac{x^2 \, d x}{(a + b x^3)^2}$

R.: $-\frac{1}{3 b (a + b x^3)} + C$

5) $\int 3 \operatorname{sen} (5 x + 2) \, d x$

R.: $-\frac{3}{5} \cos (5 x + 2) + C$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{5 + x}} d x$



R.: $2 \sqrt{5 + x} + C$

7) $\int \operatorname{tg} x \, d x$

Conviene tener en cuenta que

$$\int \operatorname{tg} x \, d x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} d x$$

y que $\begin{cases} \text{si} \quad u = \cos x \\ \text{es} \quad du = -\operatorname{sen} x \, d x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{d u}{u} = - ln \, u + C$$

R.: $- ln \cos x + C$

8) $I = \int 3 x \sqrt{1 - 2 x^2} \cdot d x$

R.: $I = -\frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2 x^2)^3} + C$

9) $\int \frac{d\,x}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

Téngase en cuenta que $Z = \frac{x}{a}$

R.: $\text{arc sen}\,\frac{x}{a} + C$

10) $\int \cos 3\,x^2 \,.\, x\,d\,x$

R.: $+\frac{1}{6}\,\text{sen}\,3\,x^2 + C$

11) $\int \text{sen}\,(4\,x - 7)\,d\,x$

R.: $-\frac{1}{4}\cos\,(4\,x - 7) + C$

12) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,d\,x$

R.: $2\,\text{sen}\,\sqrt{x} + C$

13) $\int \frac{\text{sen}^4\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,d\,x$

R.: $\frac{2}{5}\,\text{sen}^5\sqrt{x} + C$

14) $\int \frac{\text{sen}\,x}{\cos^4 x}\,d\,x$

R.: $\frac{1}{3}\,\sec^3 x + C$

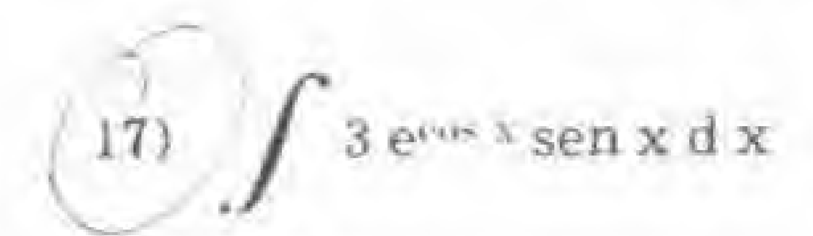
15) $\int \text{tg}\,3\,x\,d\,x$

Téngase en cuenta que

$$\int \text{tg}\,3\,x\,d\,x = \int \frac{\text{sen}\,3\,x}{\cos 3\,x}\,d\,x$$

y que $\begin{cases} \text{si } u = \cos 3\,x \\ \text{es } -\frac{1}{3}\,d\,u = \text{sen}\,3\,x \cdot d\,x \end{cases}$

R.: $-\frac{1}{3}\,ln\,\cos\,(3\,x) + C$



16) $\int \frac{1 + x}{1 - x}\,d\,x$

R.: $-2\,.\,ln\,(1 - x) - x + C$

17) $\int 3\,e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,d\,x$

Considérese $\cos x = z$

R.: $-3\,e^{\cos x} + C$

18) $\int \frac{e^x}{1 - e^x}\,d\,x$

R.: $-ln\,(1 - e^x) + C$

19) $\int \cos 3\,x\,d\,x$

R.: $\frac{1}{3}\,\text{sen}\,3\,x + C$



20) $\int \frac{d\,x}{\sqrt{2\,x - x^2}}$

Conviene completar el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 - 2\,x + 1$.

R.: $\text{arc sen}\,(x - 1) + C$

21) $\int (2\,x - 3)^{\frac{1}{2}}\,d\,x$

R.: $\frac{1}{3}\,(2\,x - 3)^{\frac{3}{2}} + C$



22) $\int \frac{d\,x}{3\,x + 5}$

R.: $\frac{1}{3}\,ln\,(3\,x + 5) + C$



23) $\int \frac{d\,x}{(2\,x - 1)^2}$

R.: $\frac{1}{2\,(1 - 2\,x)} + C$



24) $\int e^{3x}\,dx$

R.: $\frac{1}{3}e^{3x}+C$

25) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$



R.: $\ln(x^2+1)+C$

26) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}}$

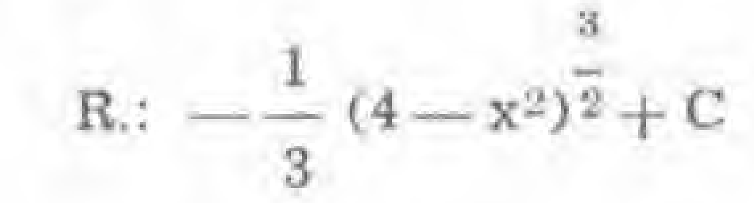
R.: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5}+C$

27) $\int k\,e^{ax}\,dx$; $ax=z$

R.: $\frac{k}{a}e^{ax}+C$



28) $\int \sqrt{4-x^2}\cdot x\,dx$



R.: $-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

29) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{5-e^x}}$



R.: $-2\sqrt{5-e^x}+C$

30) $4\int\left(4-\frac{3}{5}x\right)^3 dx$

R.: $-\frac{5}{3}\left(4-\frac{3}{5}x\right)^4+C$

31) $\int \frac{x^2\,dx}{\left(\frac{1}{3}+4x^3\right)^2}$

R.: $-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}+4x^3\right)^{-1}+C$

32) $\int \frac{5x\,dx}{6-4x^2}$

R.: $-\frac{5}{8}\ln(6-4x^2)+C$

33) $\int \frac{2^x\,dx}{2^x+5}$

R.: $\frac{\ln(2^x+5)}{\ln 2}+C$

34) $\int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx$

R.: $-\frac{5}{x-2}+C$

35) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

R.: $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

36) $\int \frac{3+e^x}{e^x+3x}\,dx$

R.: $\ln(e^x+3x)+C$

Integración por partes. — Recordemos la fórmula de diferenciación de un producto de dos funciones u(x) y v(x)

$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$

Integrando ambos miembros, se obtiene

$$\int d(uv)=\int u\,dv+\int v\,du$$

o bien

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

y. por lo tanto,

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

Esta fórmula permite resolver la integral del primer miembro calculando el segundo miembro. Si la integral de este es sencilla, el procedimiento es útil; de lo contrario, debe desecharse.

Entre las aplicaciones más importantes del método de *integración por partes* se encuentra la integración de diferenciales:

a) que contienen productos,
b) que contienen logaritmos y
c) que contienen funciones trigonométricas inversas.

I) *Resolver:*

$$\int \log x \, d x \qquad (1)$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = \log x & \text{es} & d u = \frac{1}{x} \log e \, d x \\ d v = d x & \text{es} & v = x \end{cases}$$

reemplazando en (1)

$$\int \log x \, d x = \int u \, d v = u v - \int v \, d u$$

$$= \log x \, . \, x - \int x \, \frac{1}{x} \log e \, d x$$

$$= x \log x - \log e \int d x$$

$$= x \log x - x \log e + C$$

o bien

$$\int \log x \, d x = x (\log x - \log e) + C$$

II) *Calcular:*

$$\int \cos^2 x \, d x$$

Primeramente se descompone $\cos^2 x$ en un producto

$$\int \cos^2 x \, d x = \int \cos x \cos x \, d x$$

Haciendo

$$\begin{cases} \cos x = u & \text{es} & d u = - \operatorname{sen} x \, d x \\ \cos x \, d x = d v & \text{es} & v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

luego

$$\int \cos x \cos x \, d x = \int u \, d v$$

$$= u v - \int v \, d u$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, d x$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x) \, d x$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int d x - \int \cos^2 x \, d x$$

o bien

$$\int \cos^2 x \, d x = \cos x \operatorname{sen} x + x + C - \int \cos^2 x \, d x$$

transportando las integrales al primer miembro

$$2 \int \cos^2 x \, d x = \cos x \operatorname{sen} x + x + C$$

transportando el factor 2 y haciendo $\frac{C}{2} = K$

resulta

$$\int \cos^2 x \, d x = \frac{\cos x \operatorname{sen} x + x}{2} + K$$

III) *Calcular:*

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} d x \qquad (1)$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = x & \text{es} & d u = d x \\ d v = \frac{1}{\cos^2 x} d x & \text{es} & v = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

reemplazando en (1)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} d x = \int u \, d v = u v - \int v \, d u$$

$$= x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, d x$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{- \operatorname{sen} x \, d x}{\cos x}$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{\cos x} d (\cos x)$$

Haciendo

$$\cos x = z$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} d x = x \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{z} d z$$

o bien

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} d x = x \operatorname{tg} x + \ln z + C$$

de donde

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} d x = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$$

IV) *Calcular:*

$$\int \text{arc sen } x \, dx \qquad (1)$$

Hacemos

$$u = \text{arc sen } x \qquad \text{luego} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$y \qquad dv = dx \qquad \text{luego} \qquad v = x$$

reemplazando en (1)

$$\int \text{arc sen } x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \text{arc sen } x \, . \, x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

multiplicando y dividiendo por 2 la nueva integral, previo cambio de signo

$$\int \text{arc sen } x \, dx = x \, . \, \text{arc sen } x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

Se observa, ahora, que la función de la integral es la derivada de la raíz $\sqrt{1-x^2}$, luego

$$\int \text{arc sen } x \, dx = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

V) *Calcular*

$$\int 2 x e^x . dx$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = 2x & \text{es} \quad du = 2dx \\ dv = e^x dx & \text{es} \quad v = e^x \end{cases}$$

luego

$$\int 2 x e^x dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= 2x . e^x - \int e^x 2 dx$$

y, por lo tanto,

$$\int 2 x e^x dx = 2 x e^x - 2 e^x + C$$

VI) La ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el origen de los ejes cartesianos rectangulares es

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Calcular

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

Considerando el radicando positivo

$$x^2 < a^2$$

la variable (x) tendrá un valor entre (+ a) y (— a), por lo que podemos asignar a (x) el valor (a . sen θ), ya que el seno de un ángulo varía entre (+ 1) y (— 1), luego

$$x = a \cdot \text{sen } \theta$$
$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

de donde

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta} . a . \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int a \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} . a \cos \theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int \cos \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2 \theta \, d\theta$$

como el valor de esta integral fue calculado al estudiar integración por partes, resulta

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \frac{\cos \theta \cdot \text{sen } \theta + \theta}{2} + k \qquad (1)$$

pero como $x = a \text{ sen } \theta$

es $\text{sen } \theta = \frac{x}{a}$

$$\Rightarrow \quad \theta = \text{arc sen } \frac{x}{a}$$

$$y \qquad \cos \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

reemplazando en (1) sen θ, cos θ y θ por sus valores, queda

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} . dx = a^2 \frac{\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{x}{a} + \text{arc sen } \frac{x}{a}}{2} + k$$

y en fin

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,d\,x = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}}{2} + \kappa$$

VII) *Calcular:*

$$\int x \cos x\, d\,x \qquad (1)$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = d\,x$$

$$d\,v = \cos x\, d\,x \quad \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x$$

reemplazando en (1) e integrando por partes

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

VIII) *Integrar aplicando previamente artificios algebraicos.*

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\, d\,x$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\, d\,x = \int \frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}\, d\,x = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, d\,x$$

$$= \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\, d\,x - \int \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, d\,x$$

$$= \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

IX) *Integrar aplicando previamente artificios algebraicos.*

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, d\,x$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, d\,x = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, d\,x$$

$$= \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\, d\,x - \int \frac{1}{1+x^2}\, d\,x$$

$$= \int d\,x - \operatorname{arc\,tg} x + \kappa$$

$$= x - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

X) *Calcular*

$$\int x^m \log x\, d\,x$$

$$\int x^m \log x\, d\,x = \int x^m\, d\,x \log x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \log e\, d\,x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{\log e}{m+1} \int x^m\, d\,x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{\log e}{m+1} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

XI) $\int x \operatorname{sen} x\, d\,x$

R.: $-x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

XII) $\int \operatorname{arc\,sen} x \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x$

R.: $-\operatorname{arc\,sen} x \sqrt{1-x^2} + x + C$

XIII) $\int e^{-x} \operatorname{sen} 2\,x\, d\,x$

R.: $-\dfrac{2}{5} e^{-x} \cos 2\,x - \dfrac{1}{5} e^{-x} \operatorname{sen} 2\,x + C$

XIV) $\int \ln x\, d\,x$

R.: $x\,(\ln x - 1) + C$

XV) $\int x \ln x\, d\,x$

R.: $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + C$

XVI) $\int \cos^3 x\, d\,x$

Téngase en cuenta que $\begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = \cos x \cdot d\,x \end{cases}$

R.: $\dfrac{1}{3}\,(\operatorname{sen} x \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x) + C$

XVII) $\int \dfrac{1}{(x+1)^2} \ln x\, d\,x$

R.: $\dfrac{x}{x+1} \ln x - \ln\,(x+1) + C$

XVIII) $\int e^x \operatorname{sen} x \cos x\, d\,x$

R.: $\dfrac{e^x}{10}\,(\operatorname{sen} 2\,x - 2 \cos 2\,x) + C$

XIX) $\int x^2 \ln x \, dx$

R.: $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

XX) $\int \text{arc tg}\, x \, dx$

R.: $x \,\text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

XXI) $\int x^2 \,\text{sen}\, x \, dx$

R.: $-x^2 \cos x - 2 (x \,\text{sen}\, x + \cos x) + C$

XXII) $\int x \cdot 2^x \, dx$

Considérese $\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x \, dx \end{cases}$

R.: $x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$

INTEGRALES DE EXPRESIONES FRACCIONARIAS

1) Sea el caso

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} \cdot dx$$

Tratemos de transformar el denominador en una suma o diferencia de cuadrados, para lo cual al dividir el denominador por (a) debemos multiplicar la integral por $\left(\frac{1}{a}\right)$ para que no altere el valor.

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{c}{a}}$$

haciendo $\frac{c}{a} = \pm k^2$, puesto que puede ser positivo o negativo.

Si (k^2) es *positivo*, se tiene

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + k^2}$$

o bien

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{k^2}}{\frac{x^2}{k^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{k}}{\left(\frac{x}{k}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{a k} \int \frac{d\left(\frac{x}{k}\right)}{\left(\frac{x}{k}\right)^2 + 1}$$

Si $\frac{x}{k} = z$ y recordando que

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \text{arc tg}\, z + C$$

resulta

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{1}{a k} \,\text{arc tg} \frac{x}{k} + C$$

pero como $k^2 = \frac{c}{a}$ es $k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

luego

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{c}} \cdot \text{arc tg} \frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + C$$

Cuando (k^2) es *negativo*

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 - k^2} dx$$

Multiplicamos y dividimos por la constante $(2k)$, pero al multiplicar expresada como $(x + k) - (x - k)$

$$= \frac{1}{a \cdot 2k} \cdot \int \frac{(x+k)-(x-k)}{x^2-k^2} dx$$

$$= \frac{1}{2a \cdot k} \left[\int \frac{x+k}{x^2-k^2} dx - \int \frac{x-k}{x^2-k^2} dx \right]$$

y teniendo en cuenta que

$$x^2 - k^2 = (x+k)(x-k)$$

resulta

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{1}{2ak} \left[\int \frac{1}{x-k} dx - \int \frac{1}{x+k} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2ak} [ln(x-k) - ln(x+k)] + C$$

$$= \frac{1}{2ak} ln \frac{x-k}{x+k} + C$$

pero como $k = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$ se tiene

$$= \frac{\sqrt{a}}{2a\sqrt{c}} ln \left[\frac{x - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}}{x + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}} \right] + C$$

racionalizando y efectuando las operaciones, se obtiene, finalmente,

$$\int \frac{1}{a x^2 + c} dx = \frac{\sqrt{a \cdot c}}{2ac} ln \left[\frac{x\sqrt{a} - \sqrt{c}}{x\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right] + C$$

2) Sea el caso

$$\int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx$$

en que el denominador es un trinomio de segundo grado.

Expresando el trinomio en forma canónica, resulta

$$\int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$$

Extrayendo la constante (a) y sustituyendo

$$x + \frac{b}{2a} \quad \text{por} \quad z$$

resulta

$$dx = dz$$

haciendo

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2$$

se tiene

$$\int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{z^2 - k^2} dz$$

que es una integral del mismo tipo que la del ejercicio anterior.

I) *Calcular.*

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 2} dx$$

Expresando el denominador en forma canónica

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2 - (\sqrt{7})^2} dx$$

Haciendo

$$\begin{cases} x + 3 = z \\ \sqrt{7} = k \end{cases} \qquad = \int \frac{1}{z^2 - k^2} dx$$

de acuerdo al resultado del ejercicio anterior, se tiene

$$= \frac{1}{2k} ln \left[\frac{z-\sqrt{7}}{z+\sqrt{7}} \right] + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^2+6x+2} dx = \frac{1}{2\sqrt{7}} ln \left[\frac{x+3-\sqrt{7}}{x+3+\sqrt{7}} \right] + C$$

II)

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+6x+8} \qquad R.: ln\left[\frac{(x+4)^2}{x+2}\right] + C$$

III)

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-8} \qquad R.: \frac{1}{6} ln\left[\frac{x-2}{x+4}\right] + C$$

IV)

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} \qquad R.: ln\left[\frac{2x+1}{x+1}\right] + C$$

V)

$$\int \frac{dx}{4x-x^2} \qquad R.: \frac{1}{4} ln\left[\frac{x}{x-4}\right] + C$$

VI)

$$\int \frac{dx}{1-2x+2x^2} \qquad R.: \text{arc tg}\,(2x-1) + C$$

VII)

$$\int \frac{1}{x^2+x-12} dx \qquad R.: \frac{1}{7} ln \frac{x-3}{x+4} + C$$

VIII)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3} dx \qquad R.: \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x+3} + C$$

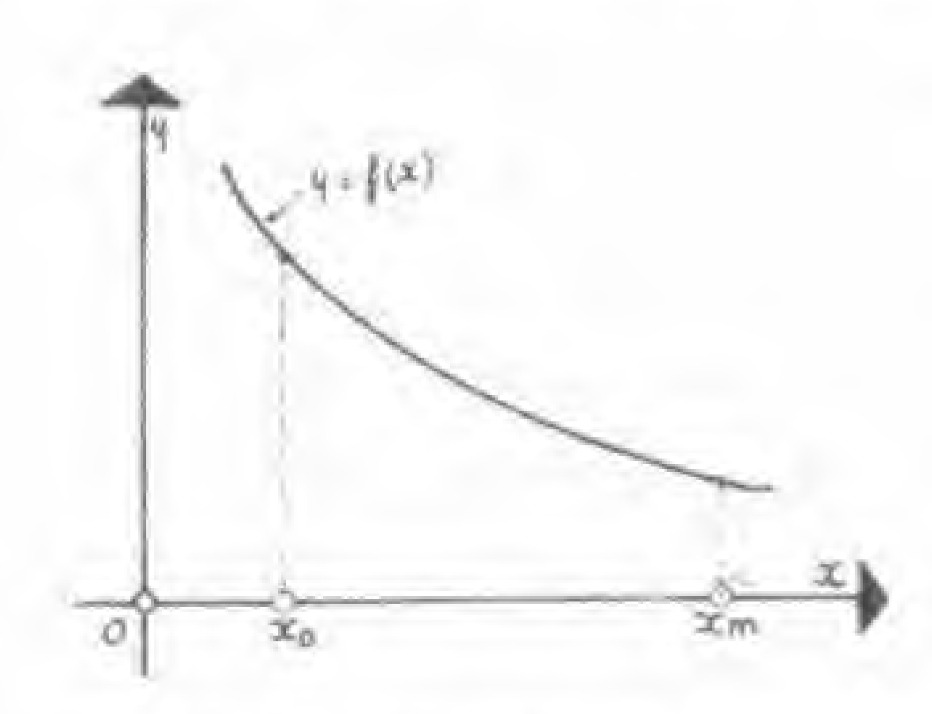
IX)

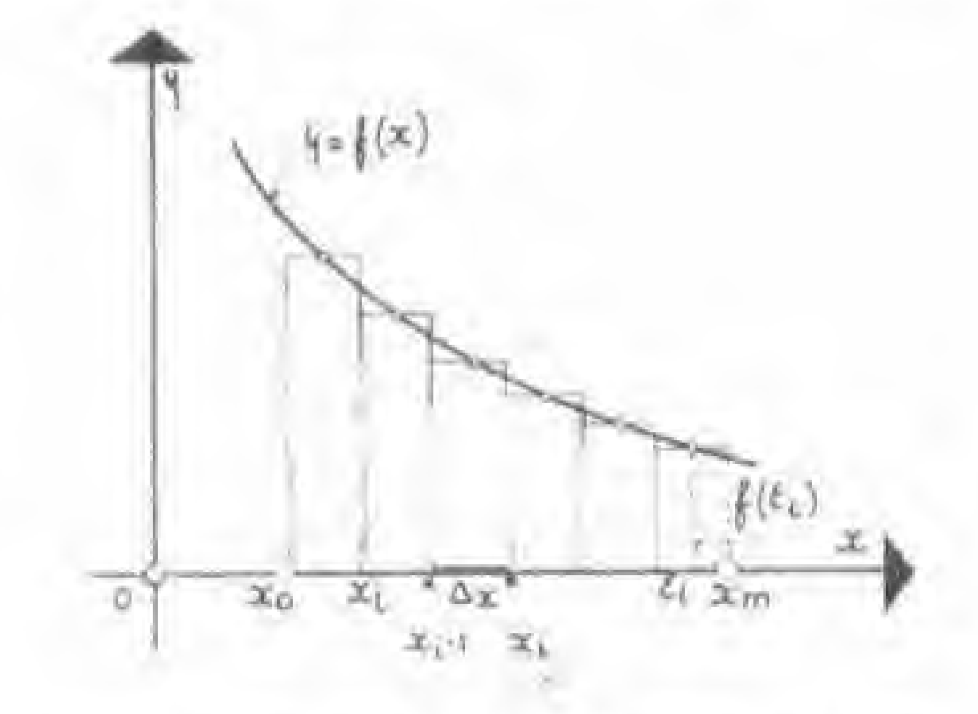
$$\int \frac{1}{4x-x^2} dx \qquad R.: \frac{1}{4} ln \frac{x}{x-4} + C$$

INTEGRALES DEFINIDAS 8

Una de las aplicaciones más prácticas del Cálculo Integral es la de hallar el *área* comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos de sus ordenadas.

Sea, por ejemplo, determinar el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, que representa una función continua,





el eje de las (x) y las ordenadas que corresponden a los valores (x_0) y (x_m) de la variable (x).

Se divide el segmento $(x_m - x_0)$ en partes iguales $\Delta x = (x_i - x_{i-1})$ y por los puntos de división se trazan las ordenadas correspondientes. Queda así la superficie dividida en rectángulos que a su vez se pueden subdividir en rectángulos más pequeños.

En cada uno de los intervalos $\Delta x = (x_i - x_{i-1})$ se eligen puntos ε_i cualesquiera tales que

$$x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$$

y en los puntos ε_i se calcula el valor de la ordenada $f(\varepsilon_i)$.

El producto $\Delta x \cdot f(\varepsilon_i)$ mide el área del rectángulo de base Δx y altura $f(\varepsilon_i)$.

Formando la suma de las áreas de todos los rectángulos análogos se tendrá el *valor aproximado del área buscada.*

$$A\ (\text{aprox.}) = \Delta x \cdot f(\varepsilon_1) + \Delta x \cdot f(\varepsilon_2) + \ldots +$$

$$+ \Delta x \cdot f(\varepsilon_m) = \sum_{i=1}^{m} \Delta x \cdot f(\varepsilon_i)$$

Si existe el límite de esta suma cuando el número m de intervalo tiende a infinito y cada uno de los intervalos tiende a cero, ese número es, por definición, el área del recinto.

$$A = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \Delta x \cdot f(\varepsilon_i)$$

Pero dado que la integral es una suma de un número infinito de sumandos, se puede inducir que

$$\boxed{A = \int_{x_o}^{x_m} f(x)\, dx = F(x)}$$

donde el diferencial de x corresponde a Δx.

En síntesis: el área F(x) *de un recinto limitado por la curva* f(x) *está definida por la función primitiva de* **f(x)**, *o sea por su integral.*

F(x), valor del área de (x_o) a (x_m), llamados *extremos de integración,* se conoce con el nombre de función primitiva. Pero hay infinitas F(x) que resuelven la ecuación

$$F'(x) = f(x)$$

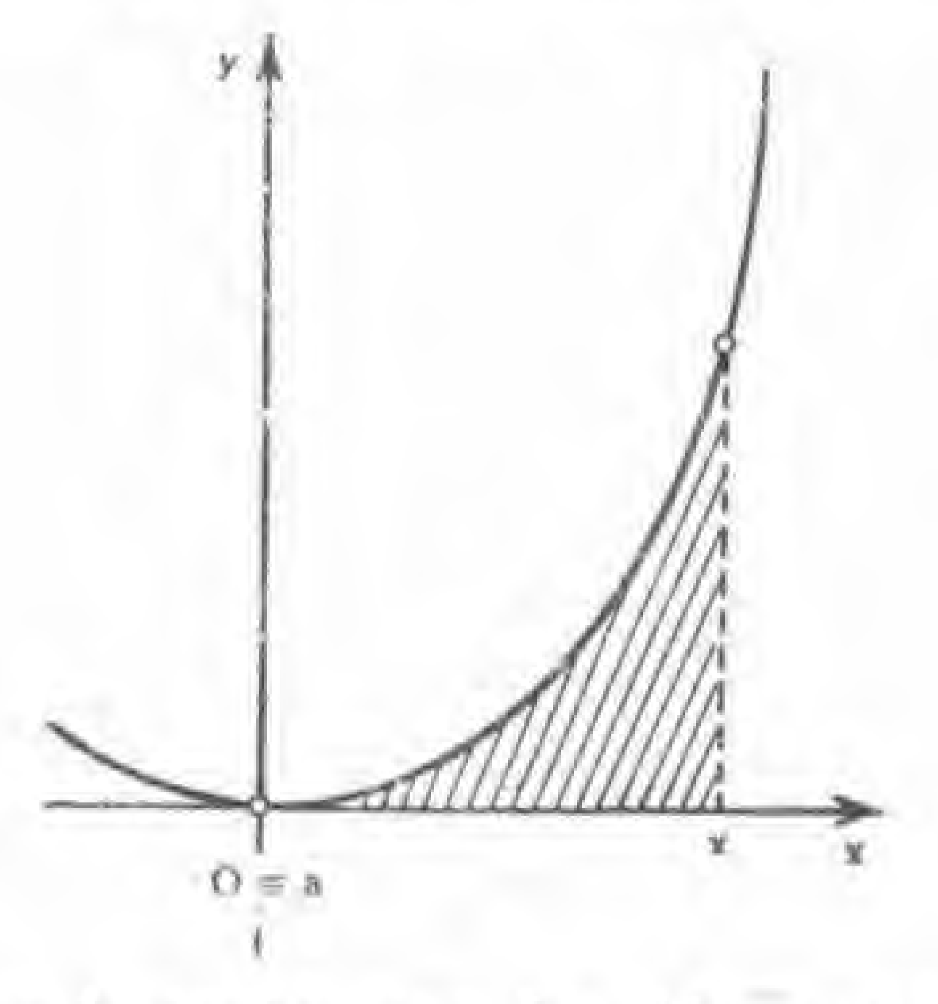
o bien

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

En cambio, el *valor del área* es uno solo, ya que una vez fijados los extremos de integración, el *área es un número.*

Cálculo de la integral definida (*)

Sea F(x) el área limitada por una curva f(x), el eje de las (x) y las dos ordenadas de la curva en los puntos (a) y (x), siendo (a), por ejemplo, igual a cero.



F(x) es, por lo tanto, una función que presenta las siguientes características.

— Depende del extremo de integración superior (x).

— Siempre es positiva.

— Únicamente se anula en el punto (a), ya que no existe área, de forma que F (a) = 0. (I)

(*) La integral *definida* expresa la adición dentro de una zona limitada, y la *indefinida* en una zona ilimitada. Es decir, consideraremos la integral definida e indefinida en la misma relación que el número concreto y el número abstracto.

Ahora bien, son infinitas las funciones que resuelven la ecuación (*):

$$F'(x) = f(x) \qquad (II)$$

ya que siendo nula la derivada de una constante, toda función $\varphi(x)$ tal que

$$F(x) = \varphi(x) + C \qquad (III)$$

cumple con (II). No obstante, cuando se habla de función primitiva sin especificar la constante, se entiende que se trata del caso particular $C = 0$.

Además, de la ecuación (III) se infiere que

$$F(x) - \varphi(x) = C$$

O bien

$$F(a) - \varphi(a) = C$$

y como por definición (I),

$$F(a) = 0$$

resulta

$$C = -\varphi(a)$$

luego reemplazando en (III), se obtiene el valor del área entre (a) y (x)

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = [\varphi(x)]_a^x$$

o bien

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

que se llama *integral definida* entre (a) y (x) de f(x).

Por lo tanto, *el área de una función* f(x) *en un intervalo*

(*) Gráficamente cada una de las funciones F(x) que resultan al dar a (x) todos los valores reales representa una curva, obteniéndose un haz de curvas, todas de la misma forma, por tener sus tangentes paralelas, vale decir, de igual pendiente f'(x).

(a, x) *es la integral definida en dicho intervalo, que se calcula determinando la diferencia entre los valores alcanzados por la función primitiva en los dos extremos de integración.* (Regla de Barrow) (*).

Si se conoce el extremo superior (b) de integración, el área será

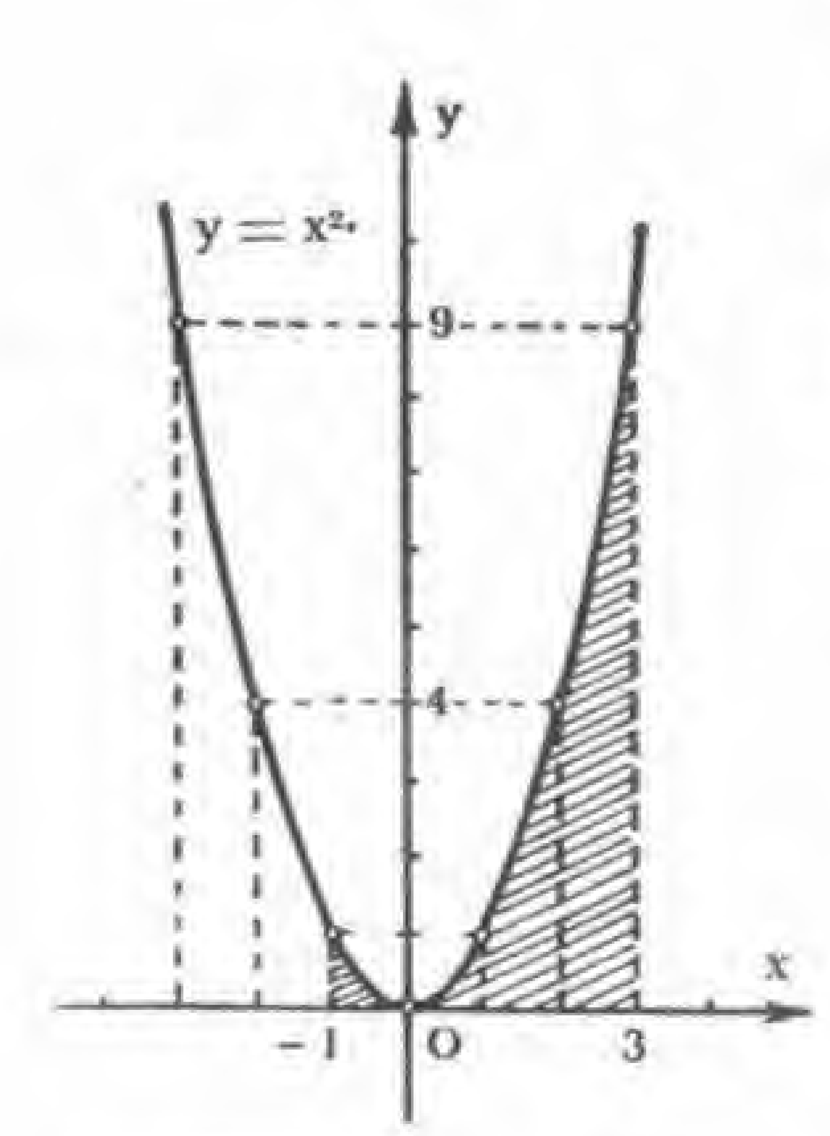
$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Conviene aclarar que todo valor de F(x) sirve para est[e] cálculo, ya que se diferencian en *constantes* que al efectuar la resta *quedan eliminadas.*

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

I) *Calcular:*

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx$$



Esta integral definida simboliza el área de la figura comprendida entre la curva $y = x^2$, el eje de las abscisas y los valores de las ordenadas correspondientes a $x_o = -1$ y $x_m = 3$.

Pero sabemos que

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

(*) Isaac Barrow, profesor de Newton, fue el primero que estableció con claridad el concepto de que los cálculos de cuadratura y la determinación de tangentes eran operaciones inversas, publicándolo en sus *Lecciones geométricas* en 1670.

Barrow fue profesor de matemáticas en Cambridge, y en 1669 cedió espontáneamente a Newton su cátedra, en vista de sus éxitos.

Restando ahora los valores numéricos alcanzados por la función primitiva en los extremos de integración, resulta

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{3^3}{3}+C\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3}+C\right]$$

$$= \frac{27}{3} + C - \left(-\frac{1}{3}\right) - C$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \quad (*)$$

$$= \frac{28}{3}$$

Otra notación:

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

Por lo tanto, la superficie rayada limitada por la curva $y = x^2$ tiene el área $\frac{28}{3}$, medida en la unidad elegida para las (x) en las abscisas y las (y) en las ordenadas.

En nuestro caso el área pedida contiene 9 unidades cuadradas más un tercio de dicha unidad.

II) *Calcular el área limitada por la curva* $y = \cos 3x$ *y el eje las abscisas para* $x_0 = 0$ *y* $x_m = \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx$$

Sabemos que

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$$

(*) Vemos que al calcular la integral definida la constante desaparece siempre y resulta un valor único.

Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = \left[\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\cdot 0$$

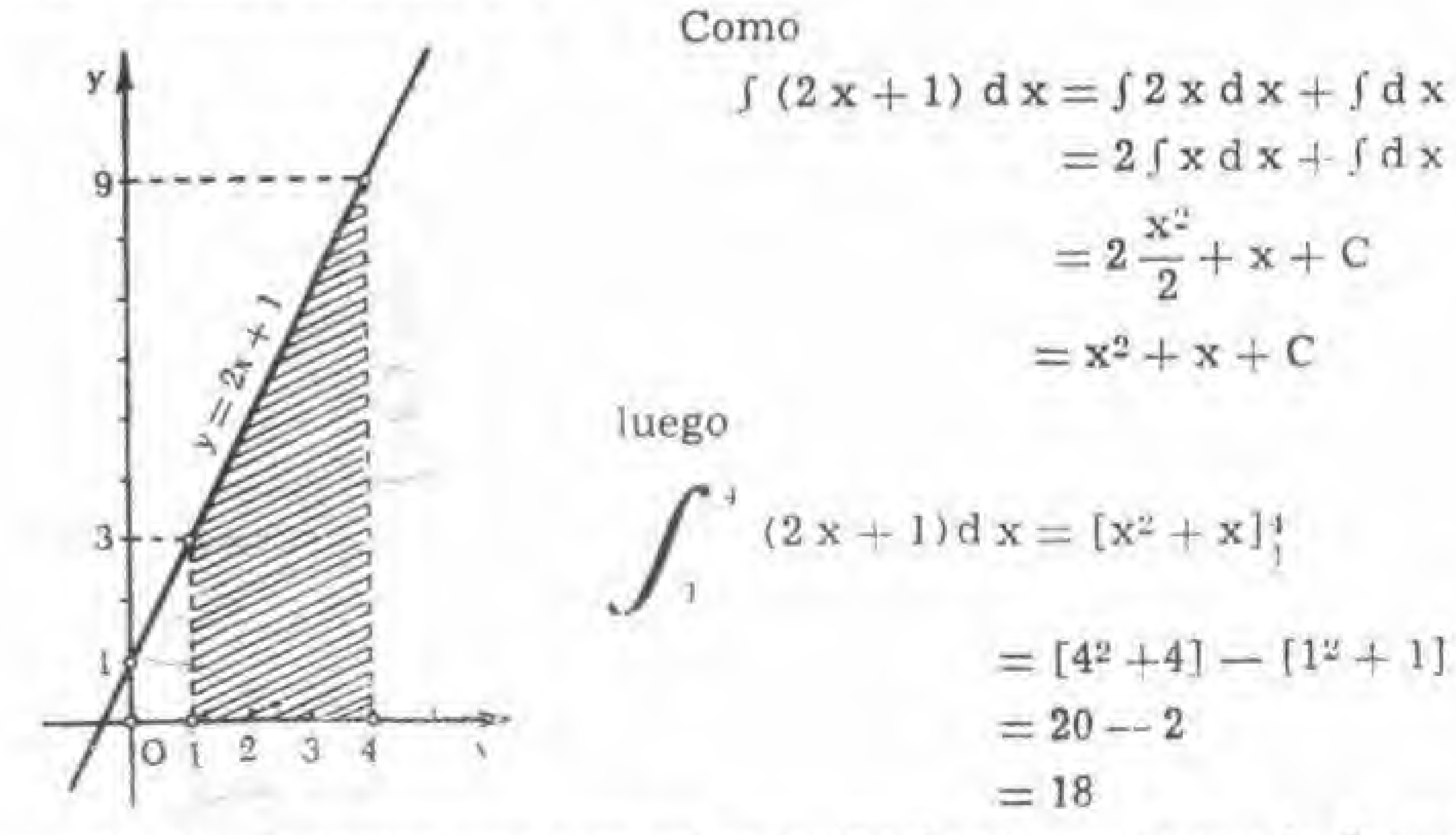
$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 0$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

Geométricamente este resultado significa que el área limitada por la curva dada, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x_m = \frac{\pi}{6}$ y $x_0 = 0$ es igual a $\frac{1}{3}$ del área de un cuadrado de lado 1.

III) *Calcular el área de la figura limitada por la recta* $y = 2x + 1$, *el eje de las abscisas y los valores de las ordenadas correspondientes a* 1 *y* 4.



Como

$$\int (2x+1)\,dx = \int 2x\,dx + \int dx$$

$$= 2\int x\,dx + \int dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$= x^2 + x + C$$

luego

$$\int_1^4 (2x+1)\,dx = [x^2 + x]_1^4$$

$$= [4^2 + 4] - [1^2 + 1]$$

$$= 20 - 2$$

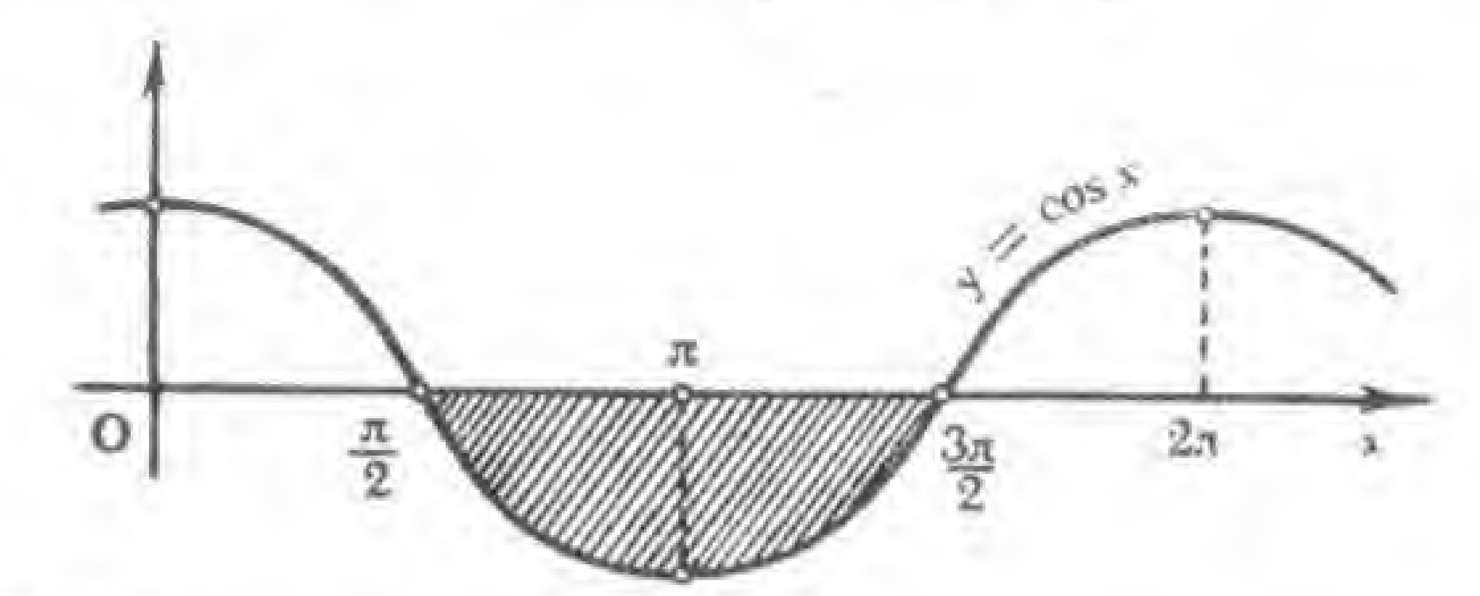
$$= 18$$

Se puede comprobar este valor teniendo en cuenta que la figura en cuestión es un trapecio de bases 3 y 9 y de altura 3.

Por lo tanto,

$$\text{Área trapecio} = \frac{3+9}{2} \cdot 3 = 18$$

IV) *Calcular el área limitada por la cosinusoide* $y = \cos x$, *el eje de las* x *y las abscisas* $x_o = \frac{\pi}{2}$ *y* $x_m = \frac{3\pi}{2}$.



Sabemos

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

luego

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = \Big[\operatorname{sen} x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

$$= |-1-1|$$

$$= |-2|$$

$$= 2 \text{ (valor absoluto)}$$

Geométricamente el área pedida es igual a dos cuadrados de lado 1.

V) *Calcular el área de un círculo.*

Para ello debemos calcular previamente el área de la cuarta parte del círculo.

La ecuación de la circunferencia cuando su centro coincide con el origen de los ejes cartesianos rectangulares es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

o bien

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Integrando para valores de (x) comprendidos entre (r) y (0), se obtendrá el área del cuadrante buscado.

Ya ha sido calculado el valor de la integral, ver ejercicio VI, integración por partes

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}}{2} + C$$

por lo tanto,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}}{2} \right]_0^r$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc\,sen} 1$$

Dado que el *arco*, cuyo *seno* es uno, vale $\frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\text{Área del cuadrante} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\pi}{2}$$

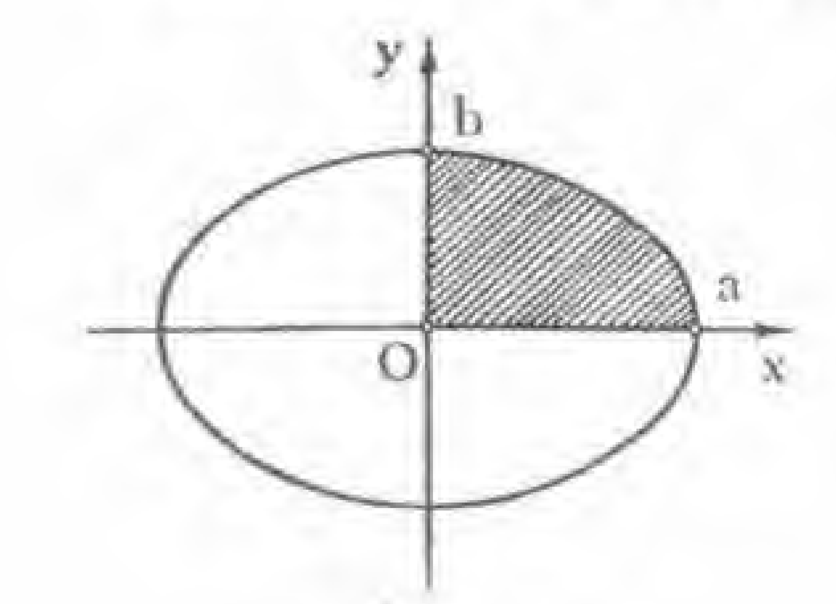
o bien

$$\text{Área del cuadrante} = \frac{\pi r^2}{4}$$

y en fin

$$\boxed{\text{Área del círculo} = \pi r^2}$$

VI) ***Calcular el área de la elipse.***



La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Su expresión explícita es

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Integrando para los valores de (x) comprendidos entre (0) y (a) se obtendrá el área de un cuarto de elipse:

$$\text{Area } \frac{1}{4} \text{ de elipse} = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot d\,x$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, d\,x$$

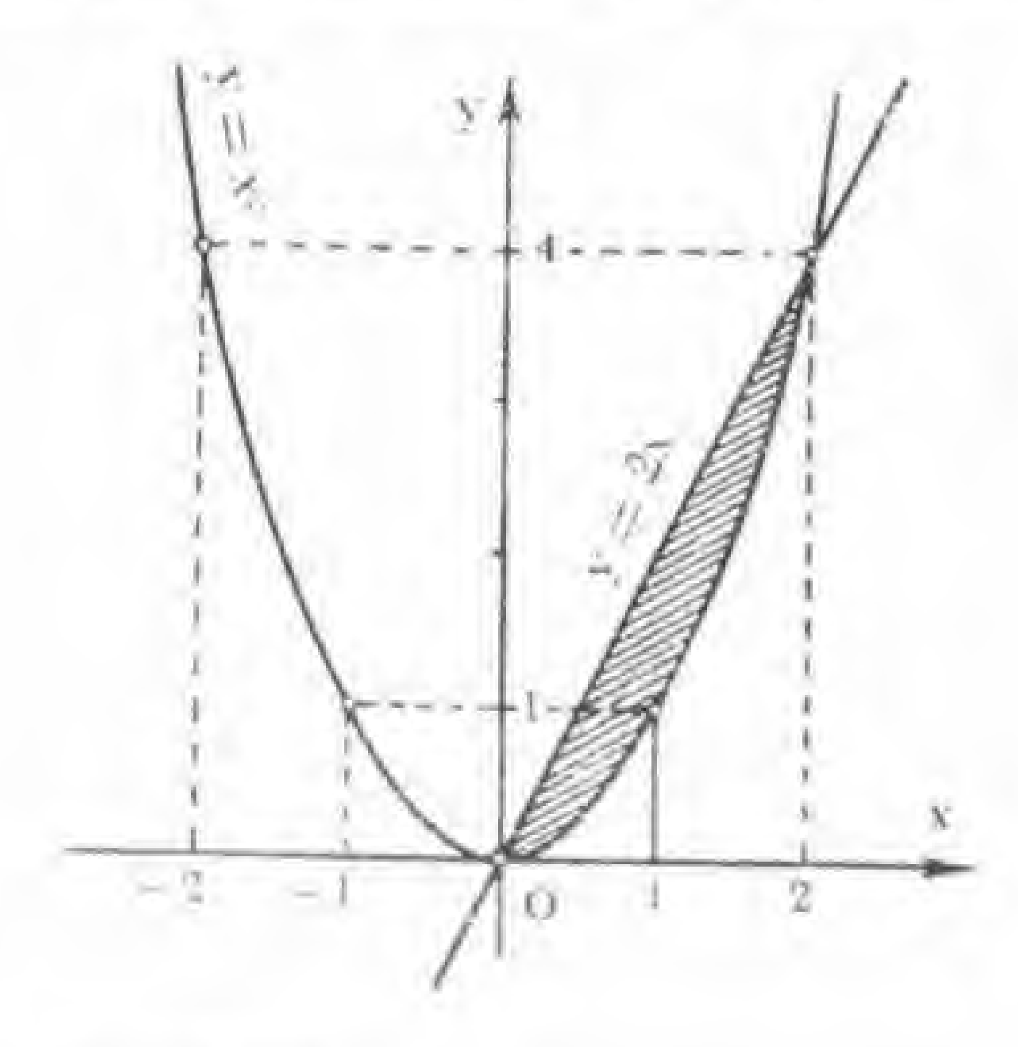
pero teniendo en cuenta el ejercicio anterior, resulta

$$\text{Area } \frac{1}{4} \text{ de elipse} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{1}{4} \pi\, a\, b$$

y, por lo tanto,

Área elipse $= \pi\, a\, b$

VII) *Calcular el área de la superficie rayada del dibujo*



Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2\,x \end{cases}$$

se tiene

$$x^2 = 2\,x$$

o bien

$$x^2 - 2\,x = 0$$

que es una ecuación incompleta de segundo grado con una sola incógnita, cuyas raíces son

$$x_1 = 0 \qquad ; \qquad x_2 = 2$$

Vale decir, que éstos son los valores de las abscisas de los puntos comunes de la parábola y la recta.

El área buscada será la diferencia entre el área de la superficie limitada por la recta $y = 2\,x$, las ordenadas correspondientes $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$ y el eje de las abscisas; y el área determinada por la parábola $y = x^2$ con los mismos elementos anteriores.

O sea

$$A = \int_0^2 2\,x\,d\,x - \int_0^2 x^2\,d\,x$$

$$A = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]$$

$$A = \left[x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = \left[2^2 - 0^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right]$$

$$A = 4 - \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{4}{3}$$

VIII) *Hallar el área limitada por dos curvas que se cortan en los puntos* $P_1\,(0, 0)$ *y* $P_2\,(2, 2)$.

Sean las curvas:

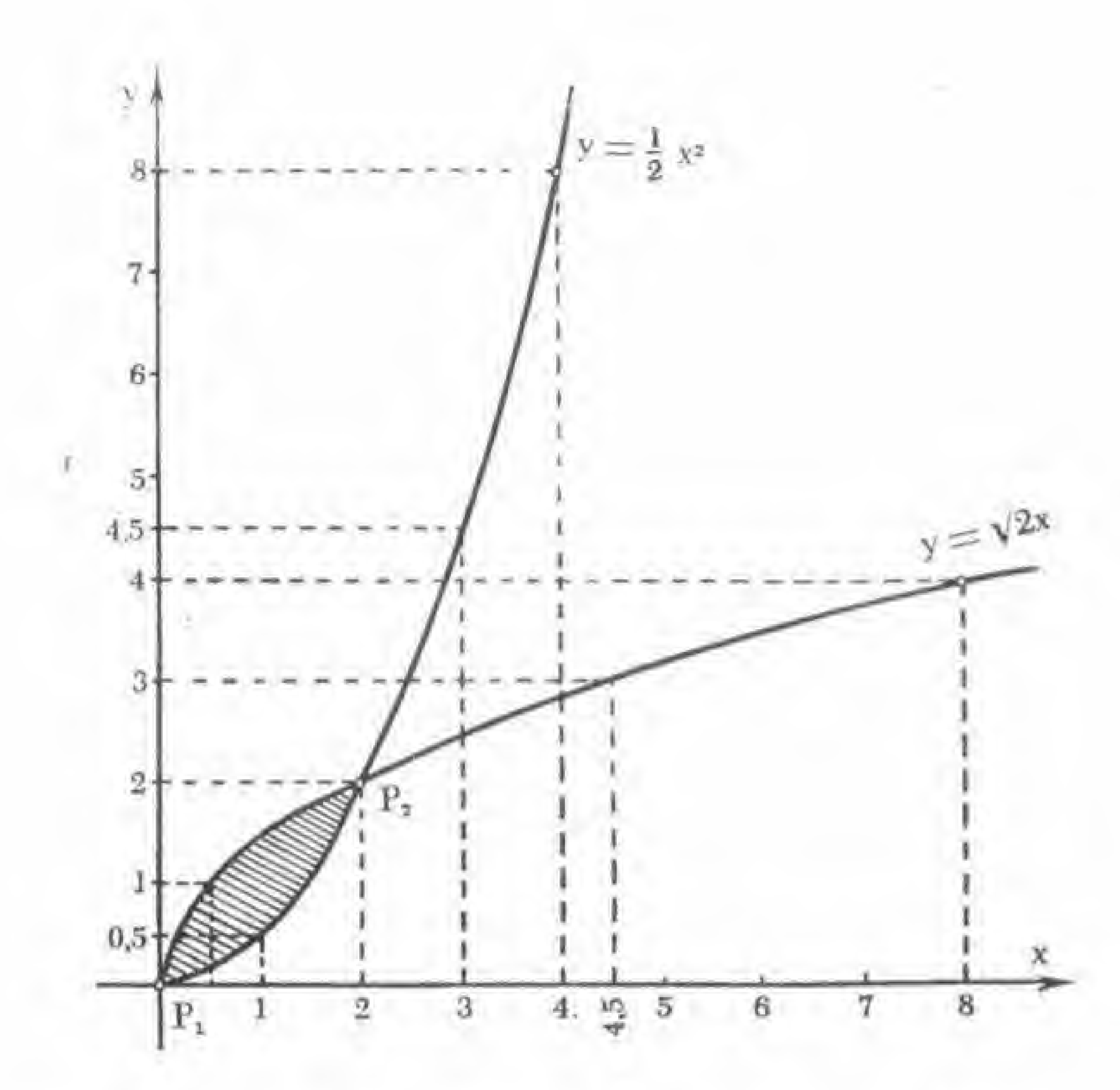
$$y = \sqrt{2\,x} \qquad ; \qquad y = \frac{1}{2}\,x^2$$

Cuadro de valores

x	0	2	4, 5	8	12, 5
y	0	2	3	4	5

Cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	— 2	— 3
y	0	½	2	4,5	8	2	4, 5



$$\text{Área de la sup. rayada} = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$$

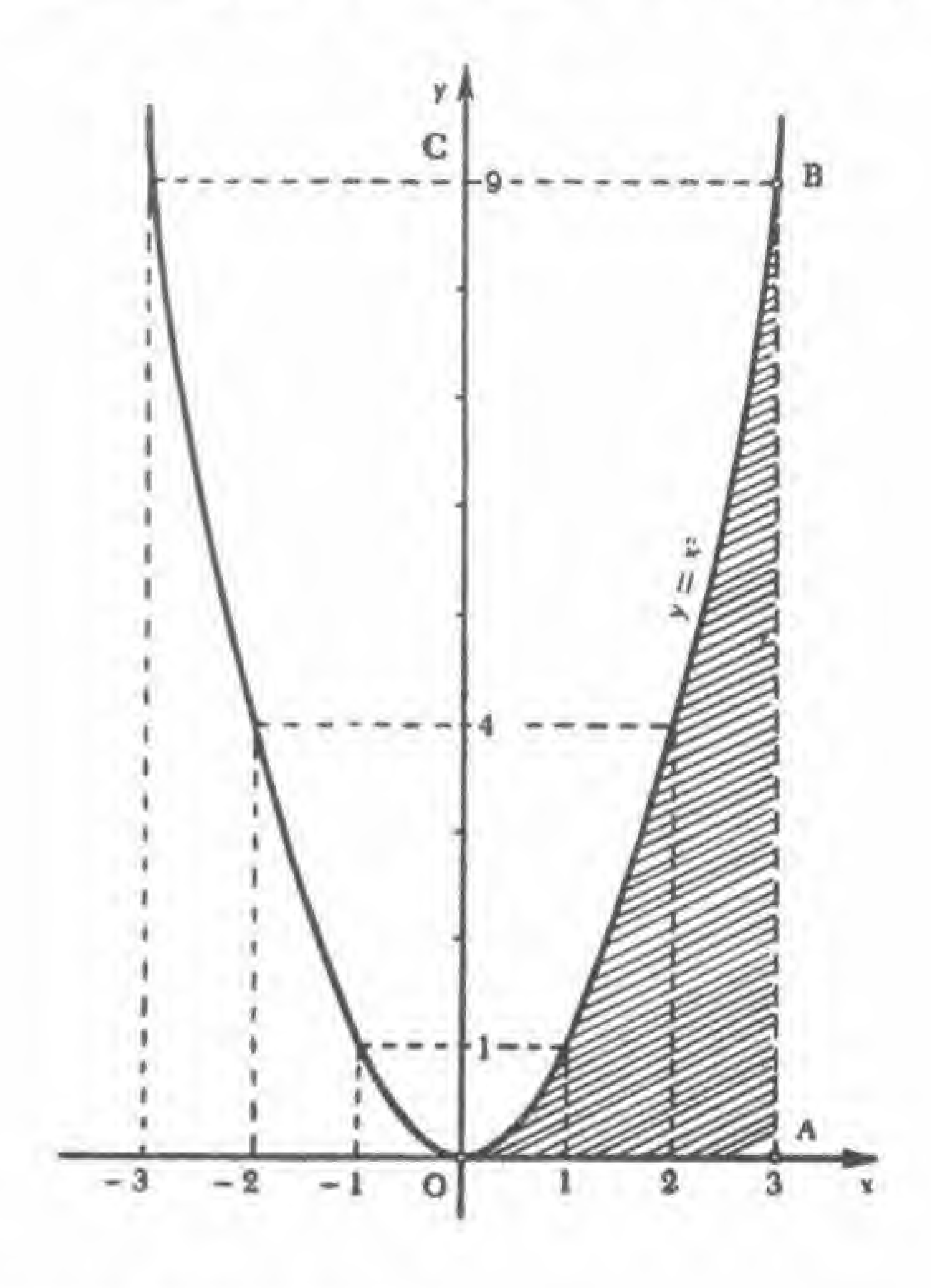
$$= \sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{6}$$

$$\text{Área sup. rayada} = \frac{4}{3}$$

XI) *Calcular el área de la superficie rayada del dibujo.*



La función de la curva es

$$y = x^2$$

$$\text{Area } OAB = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{3^3}{3}\right] - \left[\frac{0^3}{3}\right]$$

luego

$$\text{Área } O\,A\,B = 9.$$

Ahora bien, ya que resulta fácil calcular el área del rectángulo O A B C, pues

$$\text{Area } O\,A\overset{\square}{B}\,C = 3 \times 9 = 27$$

y como

	Área O A B =	9
Restando		
	Área sector parabólico O B C =	18

De aquí se infiere que la fórmula correspondiente al área del *segmento parabólico* es:

$$\boxed{A = 2 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}\,x^3}$$

en la cual (x) representa la abscisa del punto que se elija en la parábola como punto extremo para limitar el segmento parabólico.

X) *Calcular el área limitada por la parábola:*

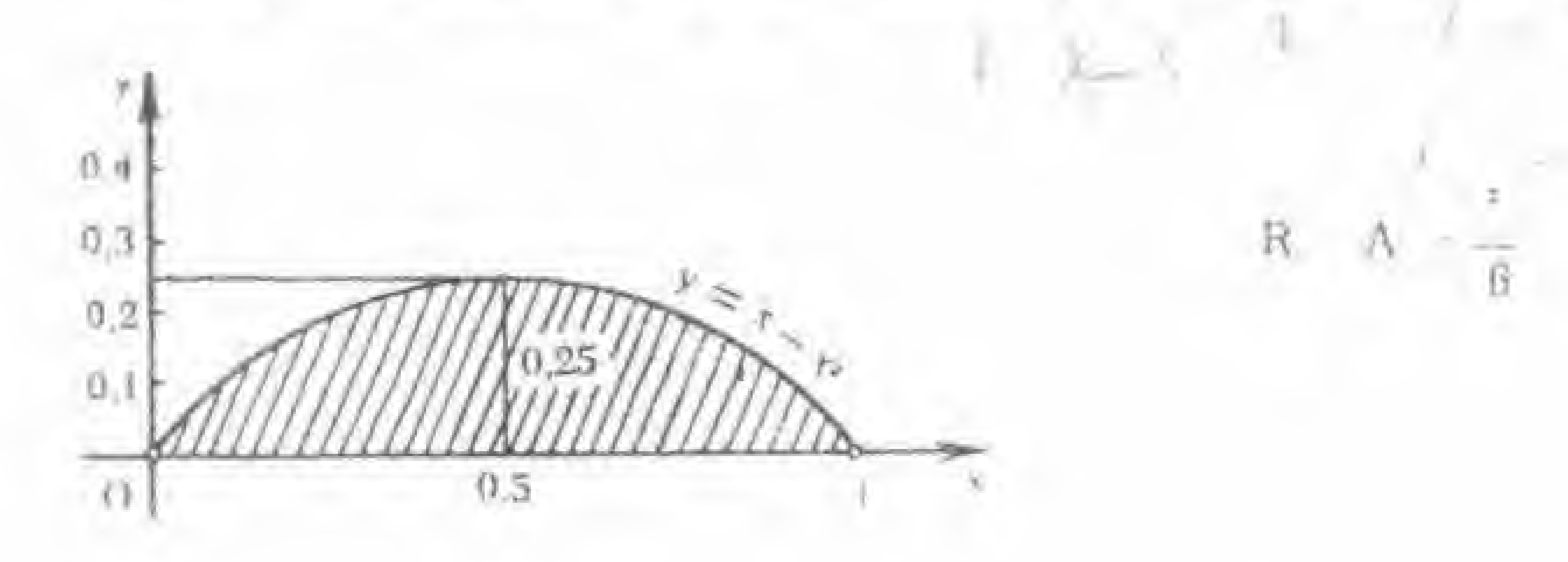
$$y = -x^2 + 2x + 1$$

y la recta

$$y = x - 1$$

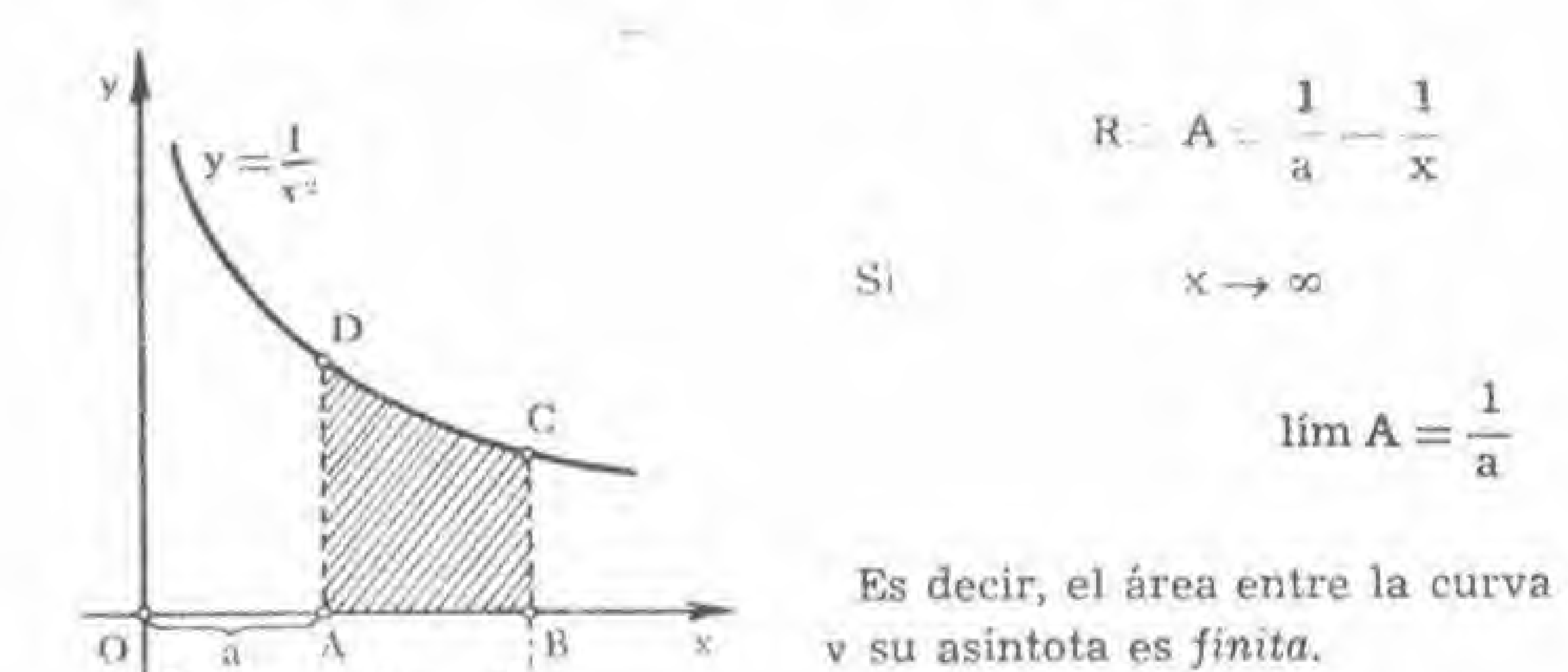
R.: $A = 4\frac{1}{2}$


XI) *Calcular el área de la superficie sombreada del dibujo.*



R.: $A = \frac{1}{6}$

XII) *Área de un segmento de la curva* $y = \frac{1}{x^2}$



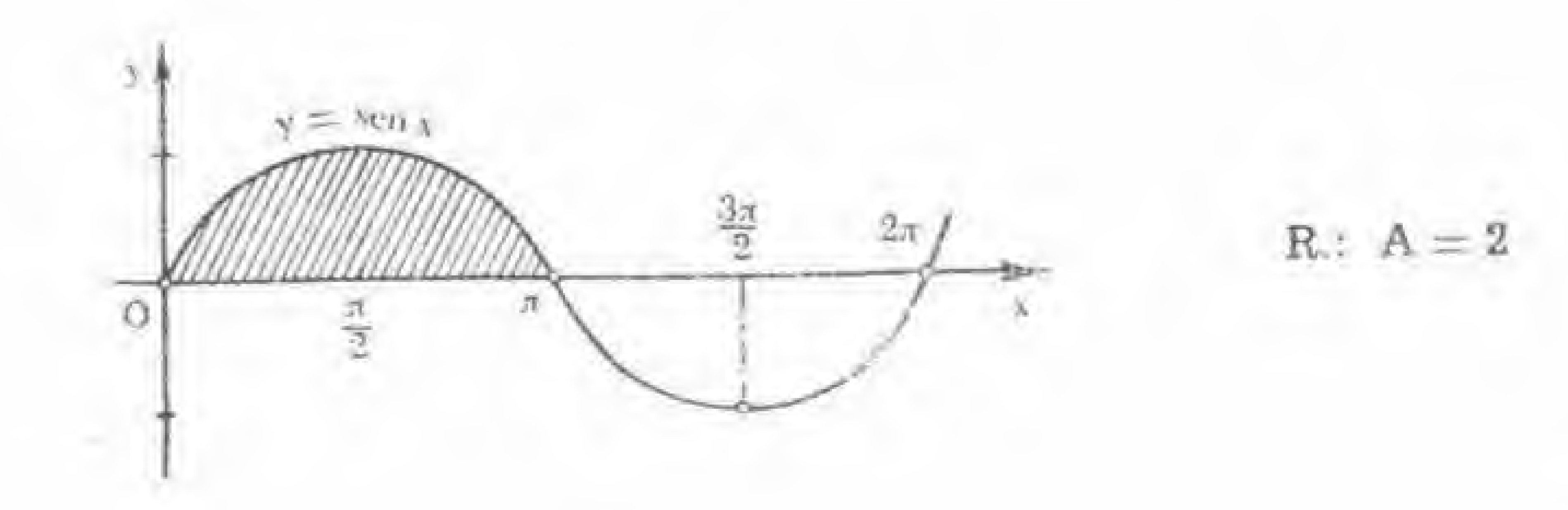
R.: $A = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$

Si $x \to \infty$

$$\lim A = \frac{1}{a}$$

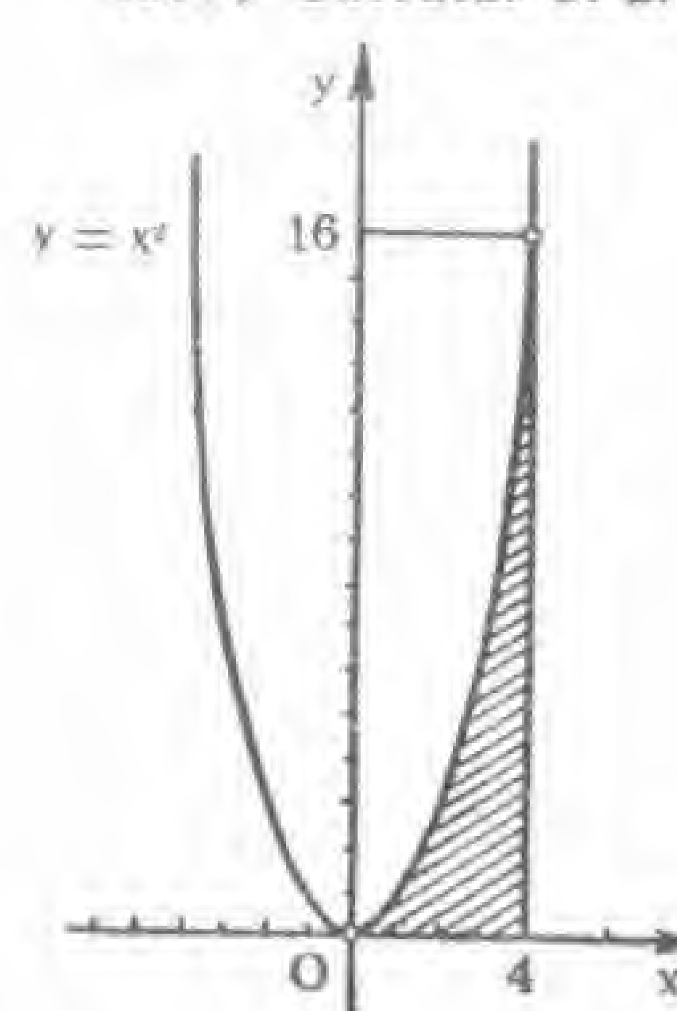
Es decir, el área entre la curva y su asíntota es *finita*.

XIII) *Área de una onda de la sinusoide:* $y = \operatorname{sen} x$



R.: $A = 2$

XIV) *Calcular el área de la superficie rayada del dibujo.*



R.: $A = 21 \frac{1}{3}$

XV) *Calcular el área encerrada por las siguientes líneas:*

$$y^2 = x$$
$$y = x - 2$$

R.: $A = 3 \frac{1}{6}$

XVI) *Calcular el área encerrada por la curva* $y^2 = 2x + 4$, *por el eje de las abscisas y las ordenadas correspondientes a* $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

R.: $A = \frac{8}{3}$

XVII) *La velocidad de un cuerpo que se mueve en línea recta está expresada por la fórmula* $v = 2 + t$. *Encontrar la distancia cubierta entre* $t = 2$ *y* $t = 5$.

R.: 16,5

XVIII) *Un cuerpo es arrojado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 10 m/s. Sabiendo que* $\frac{\delta v}{\delta t} = g$, *encontrar la distancia cubierta por el cuerpo en* t *segundos.*

R.: $\frac{1}{2} g t^2 + 10 t$

XIX) *Calcular el área de media onda sinuzoidal de la función* $y = \text{sen } 2x$.

R.: 1

XX) *Calcular el área encerrada por la hipérbola equilátera* $x \cdot y = 1$ *y el eje* x, *entre las abscisas* $x = 1$ *y* $x = a$, *siendo* $a > 1$, referida a sus asíntotas.

R.: $\ln a$

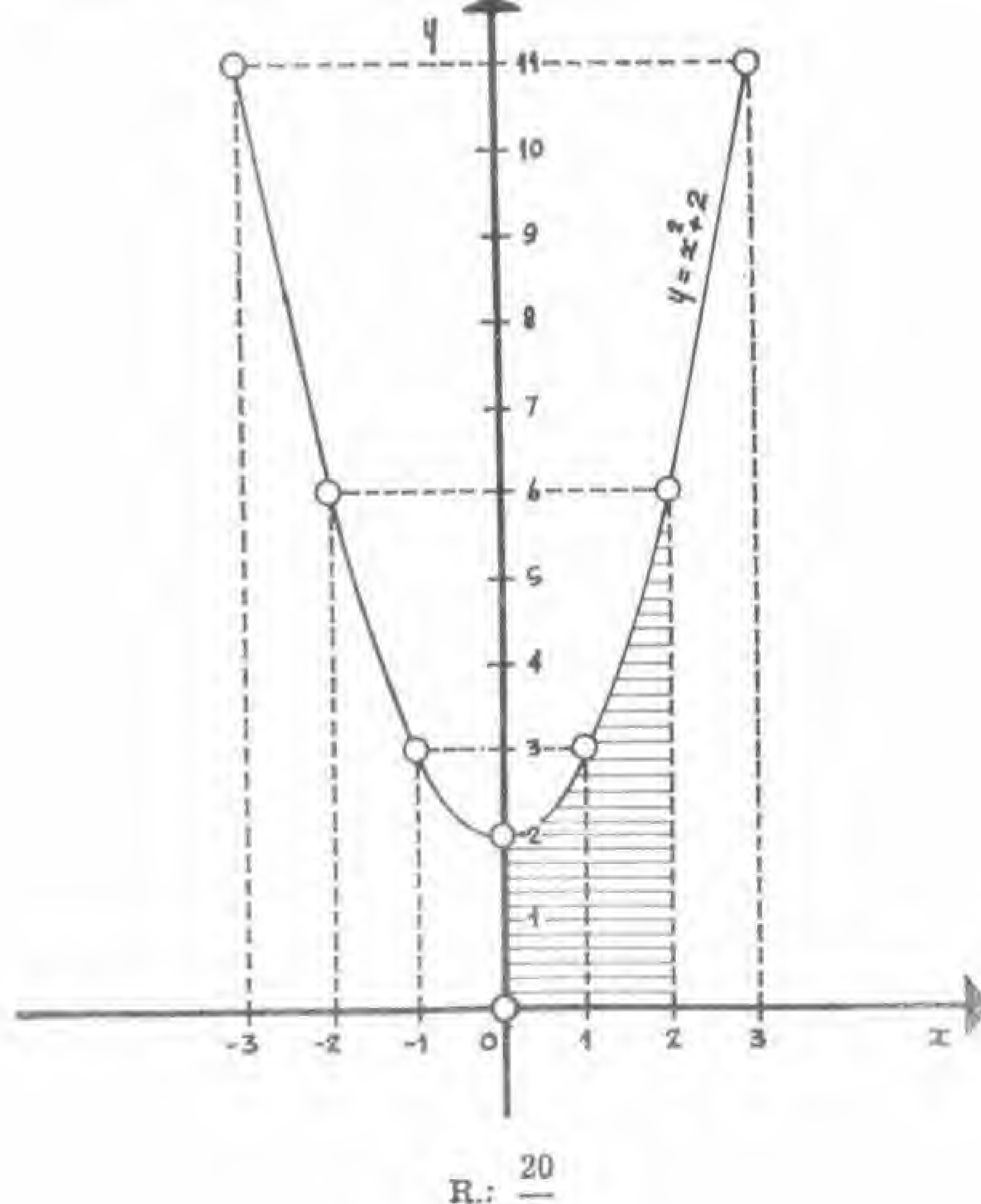
Ejercicio de Aplicación.

Si la abscisa es $a = 4$ cm, el área del recinto limitado por un arco de hipérbola equilátera será pues

$$A = (\ln 4)\,\text{cm}^2 = (2{,}30 \times \log 4)\,\text{cm}^2 \cong 2{,}30 \times 0{,}60\ \text{cm}^2 = 1{,}38\ \text{cm}^2$$

NOTA. — Los logaritmos naturales de los números mayores que 1 ($a > 1$), indican el área entre la hipérbola $x \cdot y = 1$ y el eje x, dentro de los límites 1 y a. Por eso el logaritmo natural o neperiano es también llamado *logaritmo hiperbólico.*

XXI) *Calcular el área limitada por la curva* $y = x^2 + 2$ *y el ejes de las* x, *entre* 0 *y* 2.



R.: $\frac{20}{3}$

XXII) $y = -x^2 + 4x$ entre 0 y 4.

R.: $\frac{32}{3}$

XXIII) $y = \frac{1}{x}$ entre 1 y 3.

R.: $\ln 3$

XXIV) $y = e^x$ entre 0 y 1.

R.: 1,72

XXV) $y = x^2 - 5x + 4$ entre 1 y 4.

R.: $\frac{9}{2}$

XXVI) $y = \cos 2x$ entre 0 y $\frac{\pi}{4}$

R.: $\frac{1}{2}$

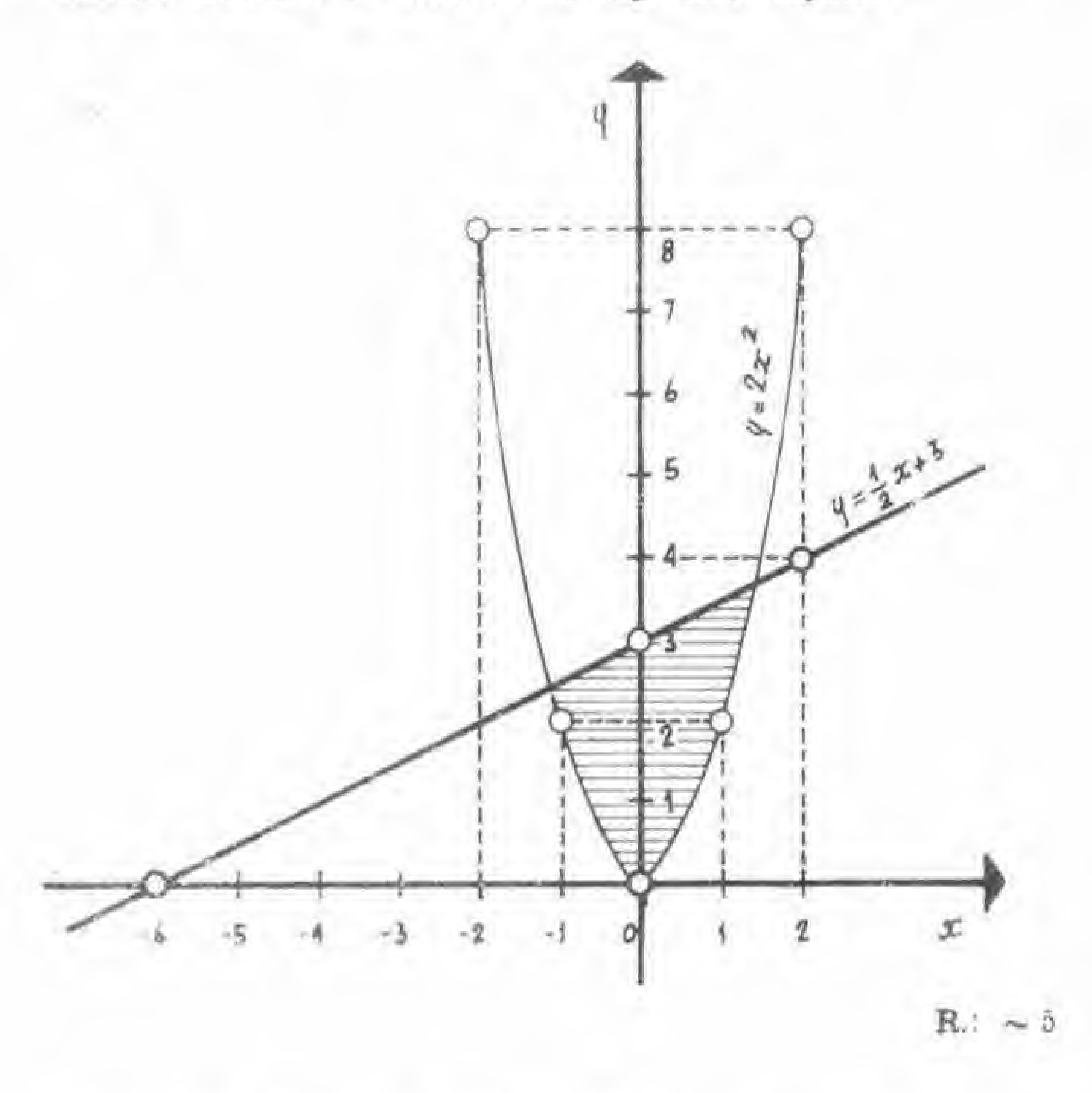
XXVII) $y = \sqrt{x^3}$ entre 0 y 4.

R.: $\frac{64}{5}$

XXVIII) Hallar el área comprendida entre la recta $y = 6x$ y la parábola $y = 2x^2$.

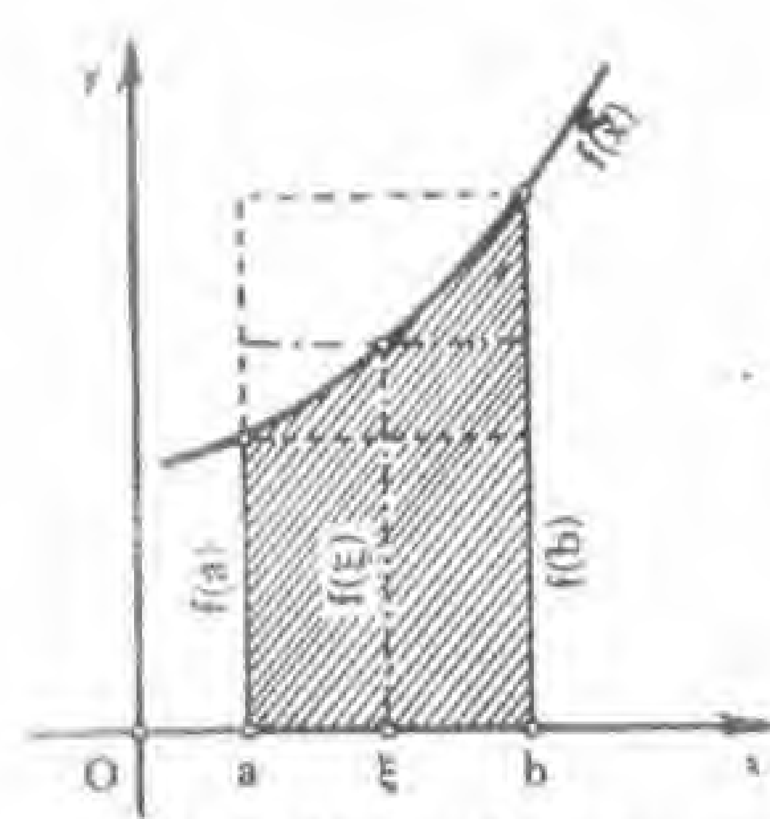
R.: 9

XXIX) Calcular el área de la superficie rayada.



R.: ~ 5

Fórmula del valor medio. — El área limitada por una curva $y = f(x)$, el eje de las (x) y las dos ordenadas límite de un cierto intervalo $(b - a)$ se puede considerar como intermedia entre las áreas de dos rectángulos: el de base $(b - a)$ y la altura $f(b)$ y el de base $(b - a)$ y altura $f(a)$.



Es decir:

$$(b-a)f(b) > A > (b-a)f(a)$$

Por lo tanto, dicha área (A) podrá expresarse como la de un rectangulo de base (b — a) y de altura f(ξ), tal que

$$f(b) > f(\xi) > f(a)$$

De aquí inferimos que

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

Esta fórmula expresa: *que el área buscada es igual a la de un rectángulo que tiene por base el intervalo dado y por altura la ordenada correspondiente a un valor intermedio entre los extremos de integración* (a) *y* (b).

El valor de dicha ordenada, *valor medio de la función*, se obtiene al pasar el intervalo (b - a) al otro miembro.

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Ejemplos

I) *Hallar el valor medio de la función:*

$$y = \text{sen } x$$

$$\text{Intervalo } \left(0 \text{ y } \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x\,dx$$

$$A = \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$A \cong 0{,}637$$

II) *Hallar el valor medio de la función:*

$$y = \text{sen } x$$

$$\text{Intervalo } \left(0 \text{ y } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen } x\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{-1{,}414+2}{2}\right]$$

$$\cong 0{,}373$$

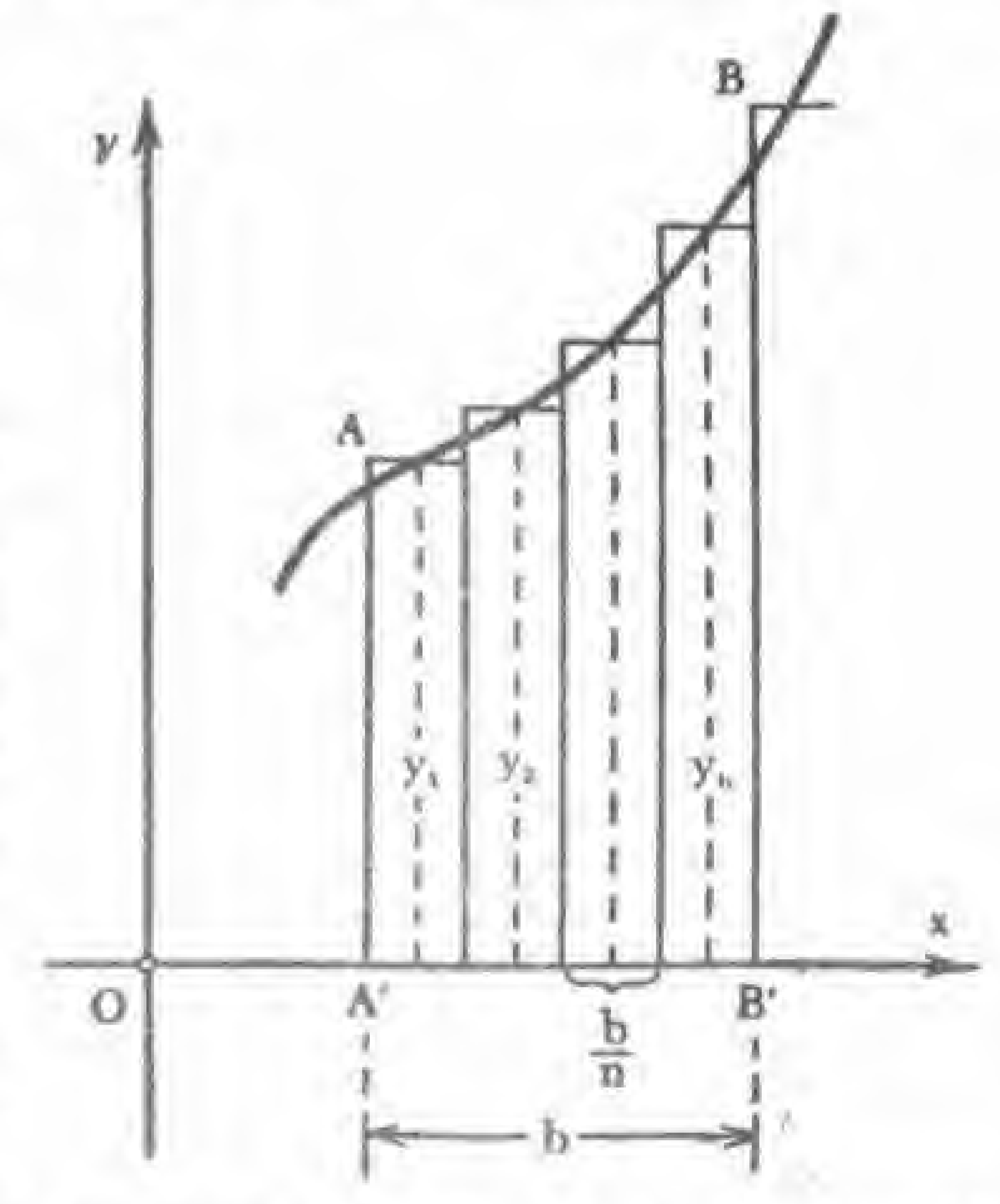
Cálculo aproximado de integrales definidas

Cuando no se conoce la primitiva de una función subintegral no se puede aplicar la integral definida, es decir, la fórmula de Barrow y se recurre entonces a *procedimientos aproximados*.

Ahora consideraremos otros procedimientos numéricos que permitirán calcular las integrales definidas.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Fórmula de la ordenada media.



Sea A'ABB' una figura limitada por una curva cualquiera AB, el eje x ≡ A'B' y las dos ordenadas extremas AA' y BB' perpendiculares a dicho eje.

Dividida la base A'B' ≡ b en cierto número (n) de partes iguales, tracemos por los puntos de división las (n — 1)

ordenadas correspondientes, que dividirán a la figura en (n) fajas de igual anchura.

Tracemos las ordenadas medias $y_1, y_2, \dots y_n$ de las fajas. Estas tendrán por anchuras $\left(\frac{b}{n}\right)$ y serán las áreas de cada uno de los rectángulos obtenidos trazando por el extremo de cada ordenada media, la paralela al eje (x) $\left(\frac{b}{n} \cdot y_1\right)$; $\left(\frac{b}{n} \cdot y_2\right); \dots ; \left(\frac{b}{n} \cdot y_n\right)$.

o sea

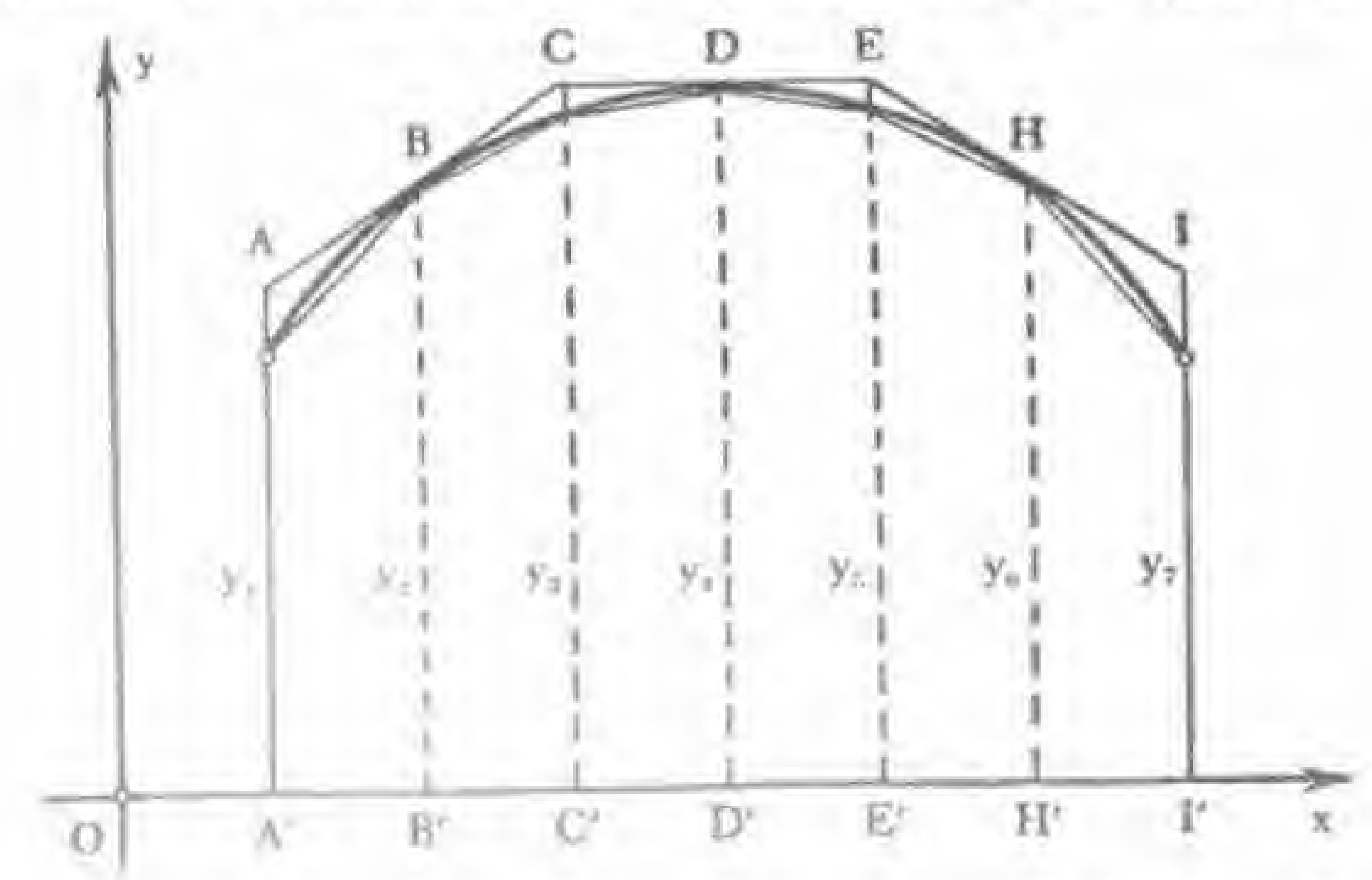
$$A = \frac{b}{n}\,[y_1 + y_2 + \dots + y_n]$$

Esta fórmula será tanto más aproximada cuanto mayor sea (n).

Esta expresión nos dice, que: *el área aproximada de la figura, es igual al producto de su base por la media aritmética de las ordenadas medias.*

Fórmula de Simpson.

Dividamos la base $\overline{A'I'}$ en un número par (2 n) de par-



tes iguales y sea (h) la longitud de cada una de ellas. Por

los puntos de división tracemos las ordenadas correspondientes $y_1 = AA', y_2, y_3, \dots y_{2n}, y_{2n+1} = \overline{II'}$.

Por los extremos de las de orden *par* tracemos tangentes a la curva, limitándolas en su encuentro con las ordenadas contiguas. Hemos formado así (n) *trapecios circunscriptos.*

Trazando las cuerdas de los arcos comprendidos entre ordenadas contiguas obtendremos (2 n) trapecios inscriptos.

Designando Tr (c) y Tr (i) la suma de las áreas de los trapecios circunscriptos e inscriptos, respectivamente. El área de la figura estará comprendida entre dichas sumas y el *método de Simpson* consiste en tomar para dicho valor

$$A = Tr(i) + \frac{1}{3}\,[Tr(c) - Tr(i)]$$

o sea

$$A = \frac{Tr(c) + 2\,Tr(i)}{3} \qquad (1)$$

tratemos de expresar esta fórmula en función de las ordenadas, llamando (P) la suma de las de orden par; (I) la suma de las de lugar impar y (E) la suma de las dos extremas, tendremos

$$Tr(c) = 2\,h\,y_2 + 2\,h\,y_4 + \dots + 2\,h\,y_{2n} =$$
$$= 2\,h\,(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n}) = 2\,h\,P \qquad (2)$$

$$Tr(i) = h\,\frac{y_1 + y_2}{2} + h\,\frac{y_2 + y_3}{2} + \quad + h\,\frac{y_{2n} + y_{2n}}{2}$$

$$= \frac{h}{2}\,[2\,(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n}) + 2\,(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) +$$

$$+ y_1 + y_{2n+1}] = \frac{h}{2}\,(2\,P + 2\,I + E) \qquad (3)$$

Reemplazando en (1) los valores (2) y (3) se obtiene la fórmula de Simpson:

$$A = \frac{h}{3}\,[4P + 2I + E]$$

Ejemplo I:

Calcular $\int_0^4 x^3\,dx$ por la fórmula de Simpson tomando $n = 4$ intervalos.

El ancho $h = \frac{4 - 0}{4} = 1$

El area buscada está limitada por la curva $y = x^3$. Reemplazando las abscisas $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en

$$y = x^3$$

obtendremos las ordenadas

$$y = 0, 1, 8, 27, 64, 125$$

Luego

$$A = \frac{1}{3}\cdot[4\,(8 + 64) + 2\,(1 + 27) + (0 + 125)]$$

$$A = \frac{1}{3}\cdot 469 = 156.33$$

Por integración:

$$\int_0^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^5 = 156,25$$

En este ejemplo la fórmula de Simpson dio un resultado casi exacto.

II) *Calcular por la fórmula de Simpson, el valor aproximado de*

$$\int_0^2 \sqrt{1 + x^5}\,dx \qquad n = 4 \qquad R.:\ A = 5,239$$

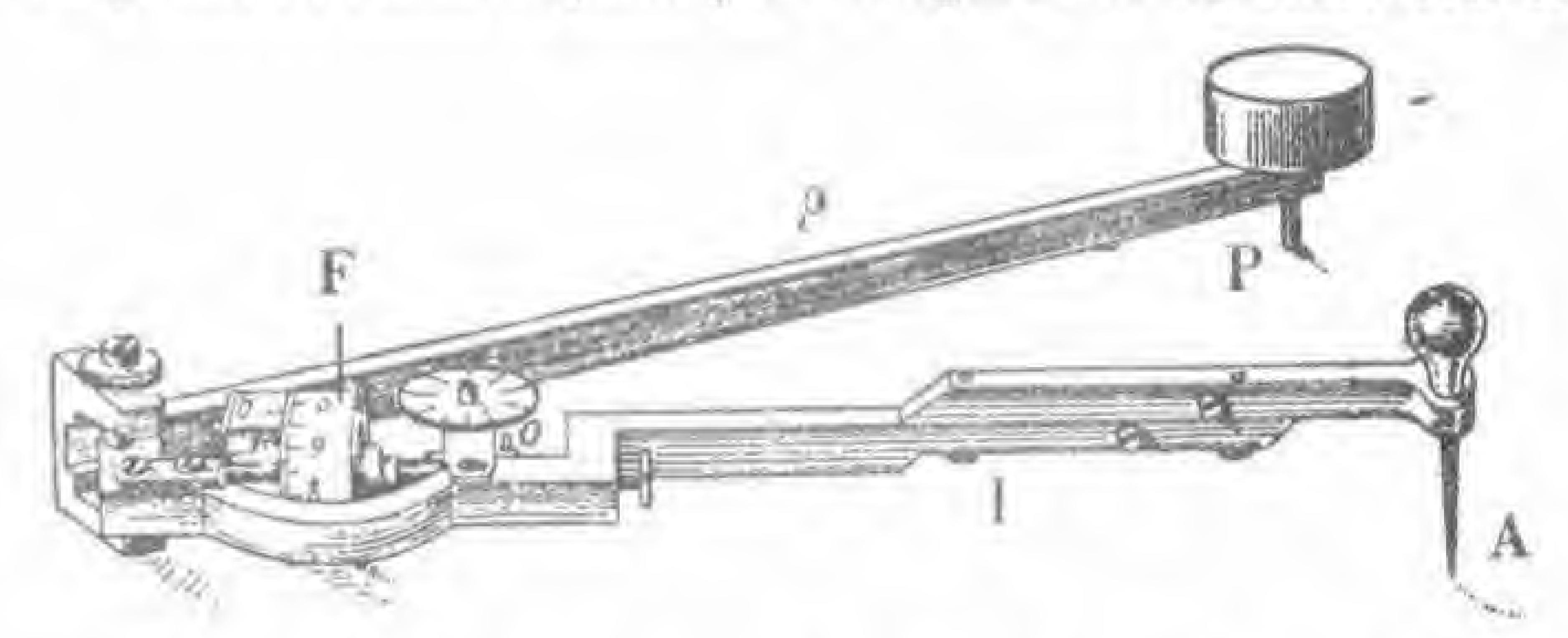
III) *Calcular por la fórmula de Simpson el valor aproximado de*

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad n = 4 \qquad R.:\ A = 1,85$$

PLANÍMETROS

Cálculo mecánico del área de una figura

Los aparatos que dan mecánicamente el área de una figura, se llaman *planímetros*. El más conocido es el *planímetro polar de Amsler*, que consta de dos varillas articuladas en F por un eje vertical y que se mueven paralelamente al plano del dibujo. El brazo (A) lleva un punzón destinado a recorrer el contorno de la figura cuya área se quiere medir. Al otro extremo va fijado un puente que sostiene un tambor graduado, con el borde saliente, formando así una rueda cuyo eje es paralelo al eje de la varilla y con el canto rayado para asegurar el contacto con el



papel del dibujo. Esta rueda recibe el nombre de *rueda contadora* y la varilla el de *brazo trazador*.

El número de vueltas completas de rueda lo registra un pequeño disco horizontal y las fracciones de vuelta pueden leerse en la graduación del tambor mediante un índice fijo y un vernier.

El otro brazo "polar", lleva en su extremo un punzón que se fija al tablero de dibujo.

Recorriendo con el punzón el contorno de una figura, el ángulo girado por la rueda nos dará, en unión de otros elementos conocidos del planímetro, el área de aquella.

Existen otros planímetros denominados de *compensación*, de *rodillos*, de *disco*, etc., modificaciones todas ellas del planímetro polar.

9 RECTIFICACION DE CURVAS

El límite de la suma, de los lados de la poligonal de infinito número de lados infinitésimos inscriptos en un arco, es *finito* y *determinado*, por cuanto es precisamente igual a la longitud del arco en cuestión.

Por lo tanto, *la longitud de un arco de curva es el límite de la suma de los lados de la poligonal cuando el número de los puntos de división tiende a infinito, al mismo tiempo que cada uno de los lados tiende a cero.*

Puesto que ese límite será también la medida de la longitud de algún segmento rectilíneo, el hallar la longitud de un arco de curva se llama también "rectificar la curva".

Con símbolos:

$$\lim \frac{\text{arco infinitésimo}}{\text{cuerda infinitésima}} = \frac{ds}{dq} = 1 \qquad (1)$$

o sea, el *límite* de la relación del arco infinitésimo a su cuerda es igual a la unidad.

De (1) se obtiene

$$ds = dq$$

o bien

$$\frac{ds}{dx} = \frac{dq}{dx}$$

Considerando el triángulo rectángulo OP_1P_2 y aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

o bien

$$\overline{P_1P_2} = \Delta x \cdot \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\lim \overline{P_1P_2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y, por lo tanto,

$$dq \sim ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = dx\sqrt{1 + (y')^2}$$

Para la suma de todos los infinitésimos que forman el arco de curva, se tiene

$$\text{Longitud del arco} = \int_a^b ds$$

y en fin

$$\boxed{\text{Longitud del arco} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx} \qquad (I)$$

Longitud de un arco de curva en coordenadas polares. Sabemos que

$$x = r\cos\theta \qquad ; \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

en donde (r) y (θ) *son variables*, luego para la primera relación

$$dx = \cos\theta\, dr - r\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

y para la segunda

$$dy = \text{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

Elevando ambos miembros de estas igualdades al cuadrado y sumándolas

$$d\,x^2 + d\,y^2 = \cos^2\theta\,d\,r^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\,\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,d\,r^2 +$$
$$+ r^2\cos^2\theta\,d\,\theta^2$$

Sacando $(d\,r^2)$ como factor común del primer y tercer término y $(r^2\,d\,\theta^2)$ de segundo y cuarto, y teniendo en cuenta que

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

resulta

$$d\,x^2 + d\,y^2 = r^2\,d\,\theta^2 + d\,r^2$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el primer miembro y sacando factor común en el segundo

$$d\,s^2 = d\,\theta^2\left[r^2 + \frac{d\,r^2}{d\,\theta^2}\right]$$

o bien

$$d\,s = d\,\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,\theta}\right)^2}$$

Integrando, obtenemos la fórmula que nos da la *longitud de un arco de curva en coordenadas polares.*

$$\boxed{\int_a^b d\,s = \int_a^b \sqrt{\left[r^2 + \left[\frac{d\,r}{d\,\theta}\right]^2\right.}\,d\,\theta} \qquad \text{(II)}$$

Ejercicios de aplicación

I) *Cálculo de la longitud de una circunferencia.*

La ecuación implícita de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

o bien

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

derivando

$$y' = \frac{-2\,x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Aplicando la fórmula (I) de rectificación entre los extremos de integración (r) y (0) se obtendrá la longitud de un cuarto de circunferencia.

$$L_{a/a} = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,d\,x$$

pero

$$1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

por lo tanto,

$$L_{a/a} = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,d\,x$$

$$L = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,d\,x \qquad (1)$$

dado que (x) es menor que (r), podemos hacer

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

luego

$$\alpha = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{r}$$

además,

$$d\,x = r\cos\alpha\,.\,d\,\alpha$$

Reemplazando en (1)

$$L = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}}\cdot r\cos\alpha\cdot d\,\alpha$$

Efectuando operaciones

$$L = 4\int_0^{\alpha_1} r\,d\,\alpha$$

pero como

$$x = r \operatorname{sen} \alpha$$

cuando

$$x = 0 \qquad \text{es} \qquad \alpha = 0$$

y si

$$x = r \qquad \text{es} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\alpha = 4 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha$$

$$L = 4 r \left[\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 r \cdot \frac{\pi}{2} - 4 r \cdot 0$$

$$\boxed{L = 2 \pi r}$$

II) *Cálculo de la longitud de la parábola.*

Sea la parábola:

$$x^2 = 2 p y \qquad (1)$$

cuyo eje de simetría es el eje (y) y cuyo vértice coincide con el origen del sistema.

Despejando (y) en (1), resulta

$$y = \frac{x^2}{2 p}$$

derivando

$$y' = \frac{2 x}{2 p} = \frac{x}{p}$$

Reemplazando este valor en la fórmula (I) de rectificación de curvas

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p} \right)^2} \qquad x\,p$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{p^2 + x^2}{p^2}} \, d x$$

$$= \frac{1}{p} \int_a^b \sqrt{p^2 + x^2} \, d x$$

Si los extremos de integración son (0) y (x), resulta

$$L = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{p^2 + x^2} \, d x = \frac{1}{2 p} \left[p^2 \ln x + \sqrt{x^2 + p^2} \, (1 + x) \right]$$

que expresa la longitud de la parábola buscada.

III) *Hallar la longitud del arco de la parábola*

$$y = \frac{x^2}{6}$$

desde el origen al punto $\left(4, \frac{8}{3} \right)$.

R.: $s = 4,98$ (unidades lineales)

IV) *Calcular la longitud del arco de parábola*

$$y = 4 x - x^2$$

que está por "*encima*" del eje de las abscisas.

R.: $s = 9,3$ (unidades lineales)

V) *Calcular la longitud del arco de la curva* $a y^2 = x^3$ *desde el origen hasta el punto* $x = 5 a$.

R.: $\dfrac{335 a}{27}$

VI) *Calcular la longitud de la curva*

$$x^2 + y^2 = a^2$$

R.: $2 \pi a$

VII) *Calcular la longitud de la curva*

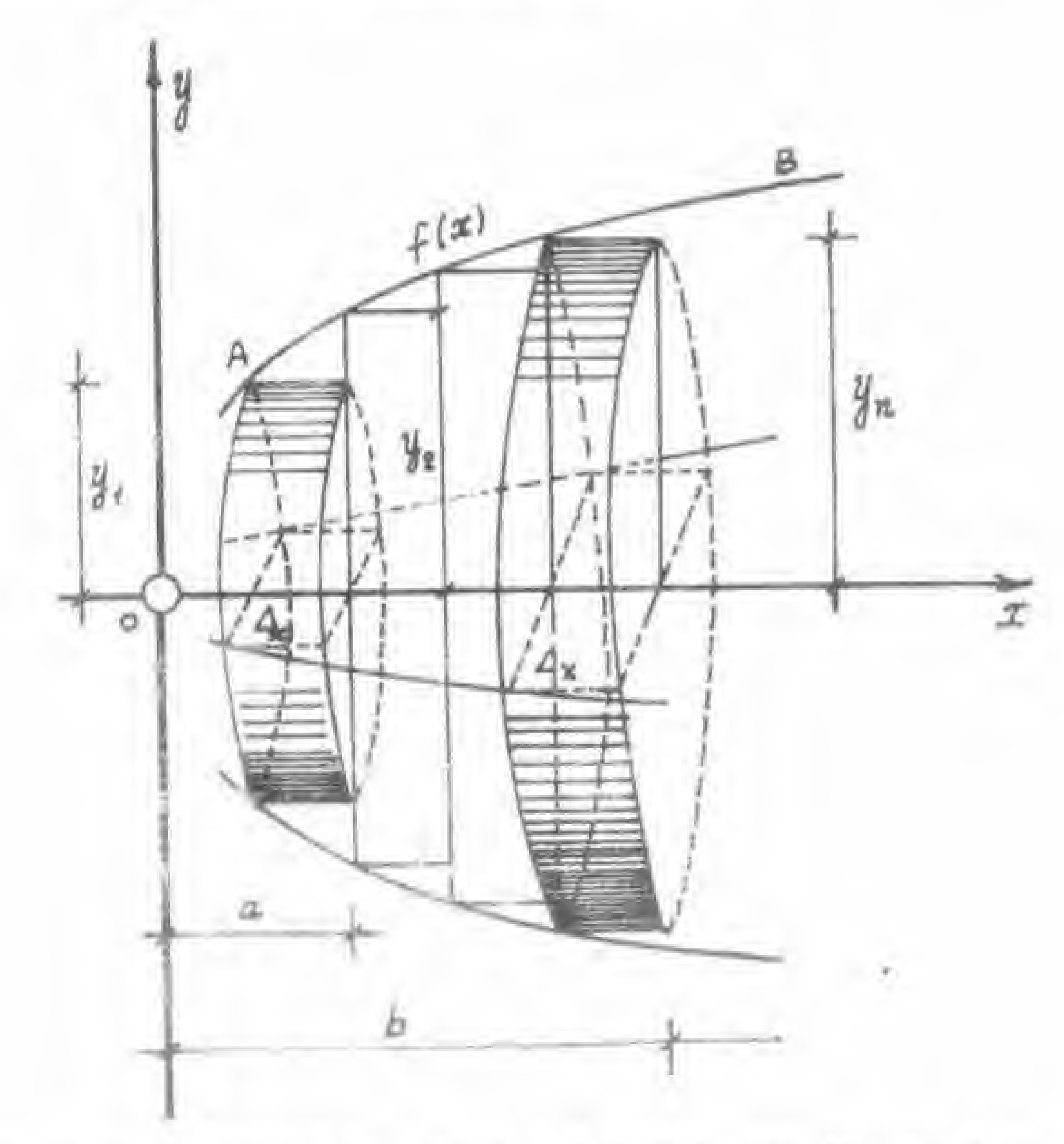
$$y^2 = \frac{x^3}{2 a - x}$$

entre $x_1 = 0$ y $x_2 = a$

R.: $\dfrac{9 a}{4}$

10 VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Se llama *sólido de revolución* al cuerpo engendrado por una curva al girar alrededor de su eje.



Si consideramos un arco AB correspondiente a una función $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, b) y suponemos que esta curva gira alrededor del eje de las abscisas, el volumen del sólido así obtenido se determinará mediante integrales simples.

Dividimos el intervalo (a, b) en pequeños intervalos (Δx) y consideramos las distintas ordenadas correspondientes a los puntos de división, las que al girar alrededor del eje de las (x) engendran las bases de cuerpos que escasamente difieren de cilindros. Al hacer tender (Δx) a cero, en el límite obtenemos un conjunto de cilindros, la suma de cuyos volúmenes es el volumen del sólido de revolución.

Dado que el volumen de cada cilindro es ($\pi y^2 \, dx$), el sólido de revolución tendrá como volumen

$$V = \pi y_1^2 \, dx + \pi y_2^2 \, dx + \ldots + \pi y_n^2 \, dx$$

o bien

$$V = \int_{i=1}^{i=n} \pi y_i^2 \, dx$$

y, en general, el volumen del *sólido de revolución* tiene por fórmula

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 \, dx}$$

I) *Calcular el volumen del sólido de revolución de la curva* $y = x^2$ *alrededor del eje de abscisas.* (Figura en página siguiente.)

Datos: $a = 1$ $b = 3$

Aplicando la fórmula

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

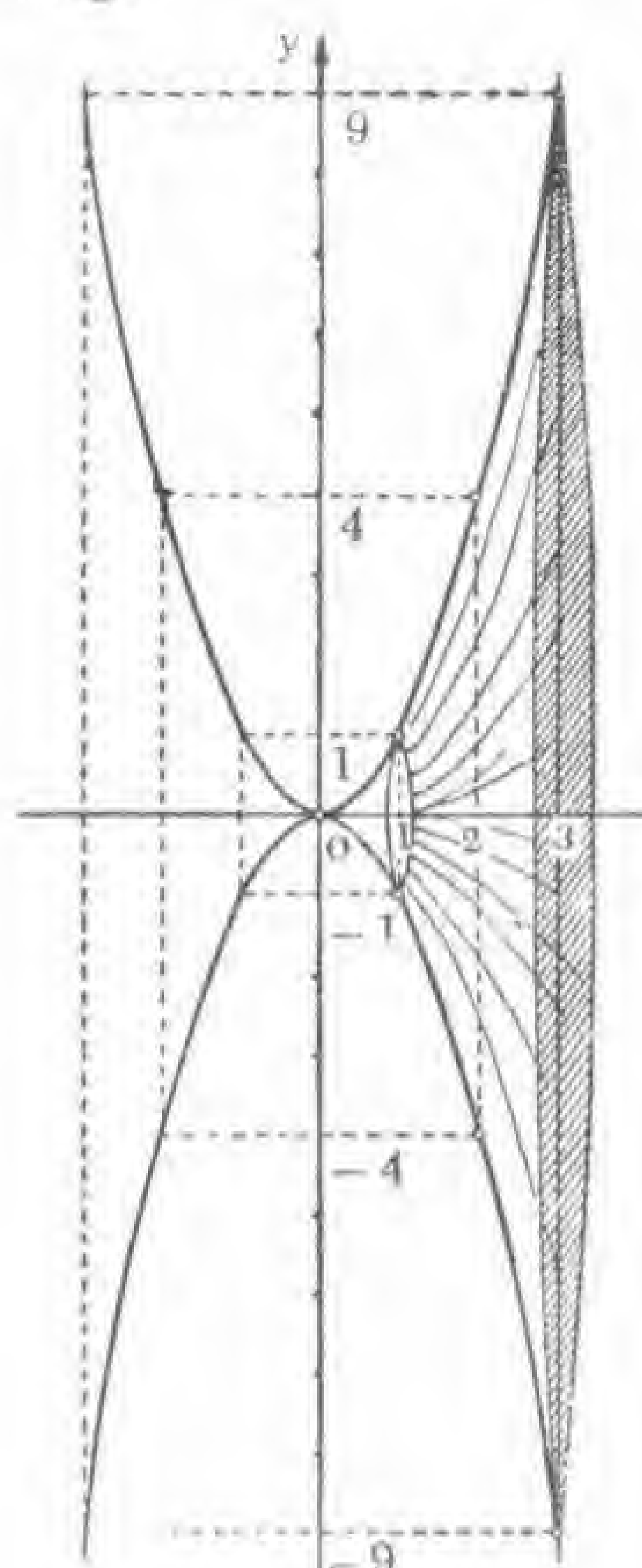
y teniendo en cuenta que

$$y = x^2$$

resulta

$$V = \pi \int_1^3 x^4 \, dx$$

luego



$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 = \pi \left[\frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right] = 3{,}14 \times \frac{242}{5}$$

$$V \cong 152$$

II) *Calcular el volumen de la* **esfera.**

Consideremos el giro de un cuarto de circunferencia con centro en el origen del sistema.

La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

o bien

$$y^2 = r^2 - x^2$$

Aplicando la integral que define el volumen, se tiene

$$\text{Volumen semiesfera} = \pi \int_0^r y^2 \, dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[\int_0^r r^2 \, dx - \int_0^r x^2 \, dx\right]$$

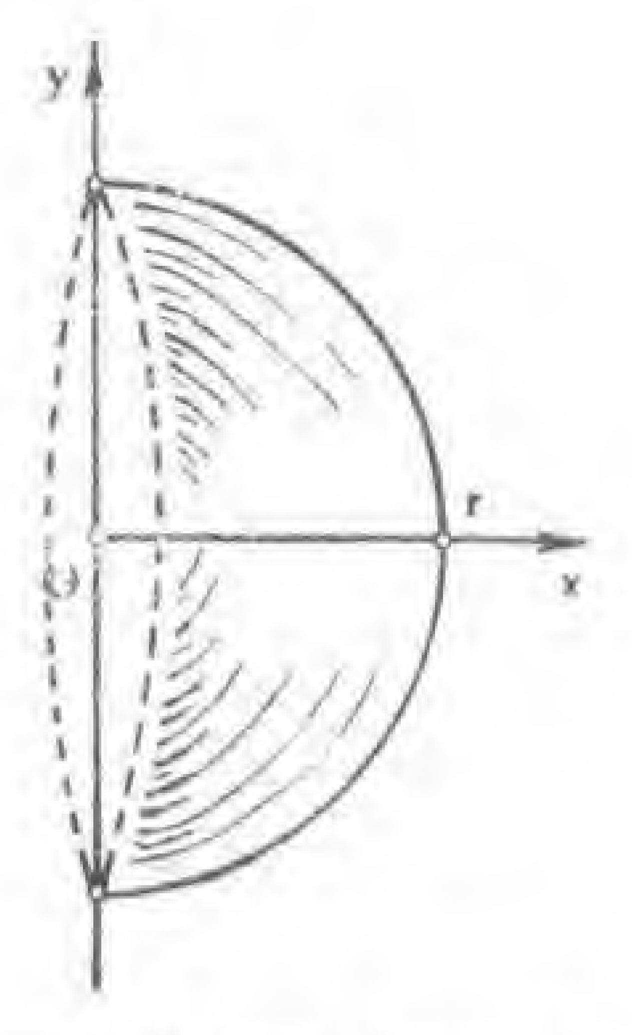
$$= \pi r^2 \int_0^r dx - \pi \int_0^r x^2 \, dx$$

$$= \pi r^2 [x]_0^r - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \pi r^2 [r - 0] - \pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$\text{Volumen semiesfera} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$



Por lo tanto.

$$\boxed{\text{Volumen esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3}$$

III) *Calcular el volumen del sólido engendrado por la revolución de una recta alrededor de un eje.*

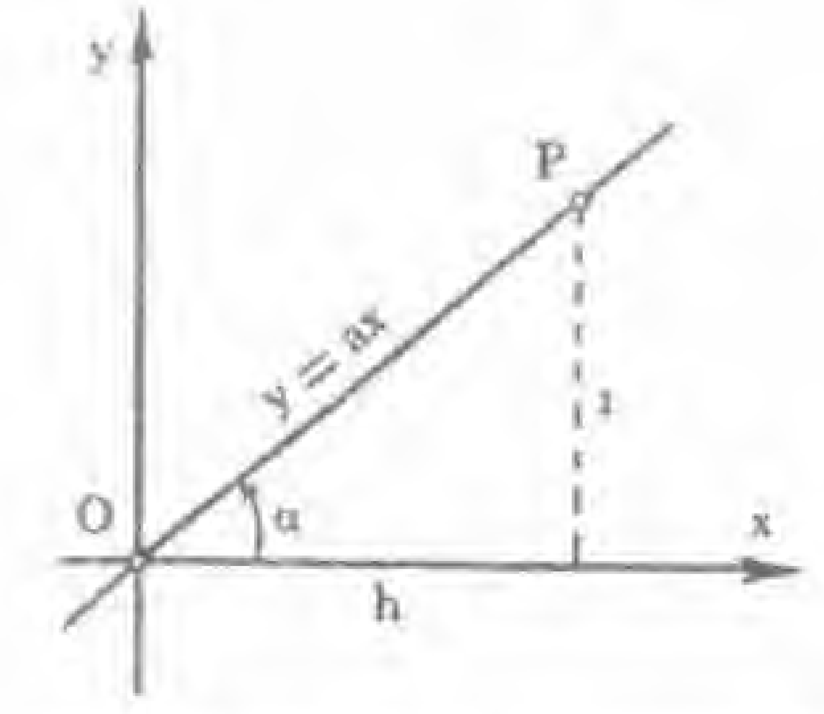
a) Recta y eje tienen un punto común.

— *Volumen del cono de revolución.*

Considerando que el punto común es el origen, la ecuación de la recta es:

$$\mathbf{y = a\,x}$$

siendo $a = \text{tg}\,\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{r}{h}$



Luego

$$y = \frac{r}{h} x$$

Aplicando la fórmula del volumen

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

obtendremos el volumen del cono de revolucion.

$$\text{Volumen cono} = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, d\,x = \frac{\pi r^2}{h^2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^r$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{\pi r^2 h^3}{3 h^2}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\text{Volumen cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

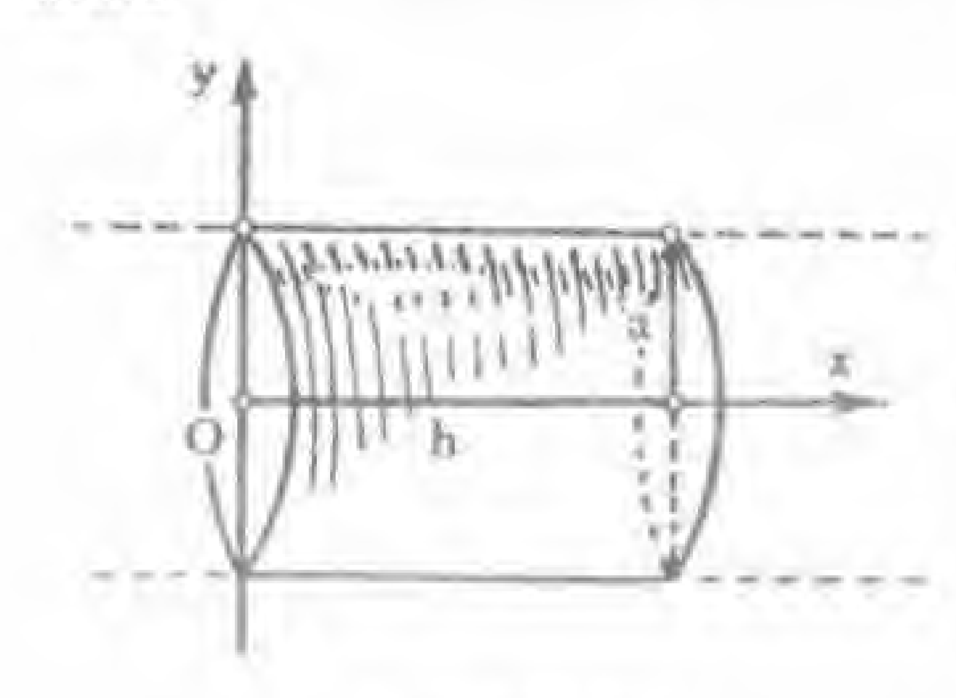
b) La recta es paralela al eje.

— *Volumen del cilindro de revolución.*

La ecuación de la recta paralela al eje de las (x) es

$$y = a$$

Considerando como extremos de integración (0) y (h), la fórmula



$$V = \pi \int_a^b y^2 \, d\,x$$

se transforma en

$$\text{Volumen cilindro} = \pi \int_0^h a^2 \, d\,x$$

$$V = \pi a^2 \int_0^h dx = \pi a^2 [x]_0^h$$

$$V = \pi a^2 h$$

Como $a = r$ por ser la distancia de la recta al eje, es

$$\boxed{\text{Volumen del cilindro de revolución} = \pi r^2 h}$$

IV) *Calcular el volumen engendrado por un arco de sinusoide.*

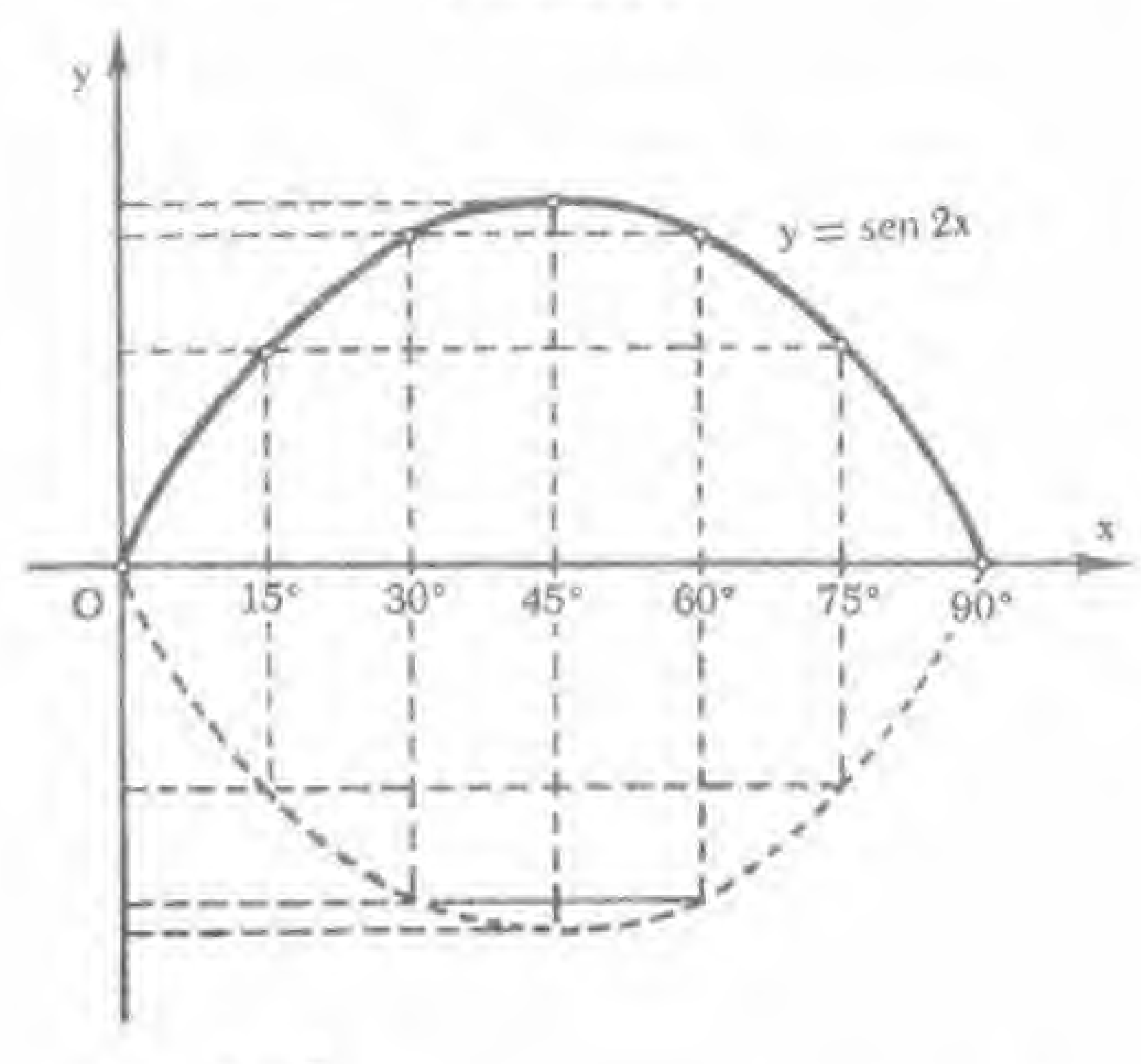
$$y = \text{sen}\, x$$

para $\quad a = 0$

y $\quad b = \pi \qquad$ R.: $V = \frac{1}{2} \pi^2$

V) *Calcular el volumen engendrado por la curva*

$$y = \text{sen}\, 2\, a$$



para $\quad a = 0$

y $\quad b = \frac{\pi}{2} \qquad$ R.: $V = \frac{1}{4} \pi^2$

VI) *Hallar el volumen del sólido engendrado por la curva*

$$y^2 = \frac{x^3}{a}$$

alrededor del eje de las abscisas:

$y = 0 \qquad x = a$

R.: $V = \frac{1}{4} \pi a^3$

VII) *Hallar el volumen del sólido de revolución engendrado por una arcada de*

$$y = \cos 2\, x$$

alrededor del eje de las (x) *para* $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$

R.: $V = \frac{1}{4} \pi^2$

11 AREA DE LAS SUPERFICIES DE REVOLUCION

Sea un arco AB correspondiente a una función $y = f(x)$ definida en un intervalo $\overline{RS}$ y supongamos que esta curva gira alrededor del eje de las abscisas engendrando un sólido de revolución.

Para valuar el área de la superficie de revolución, consideremos la parte engendrada por el arco de curva infinitamente pequeño $CD = ds$.

Se puede asimilar este arco a la cuerda que subtiende y la zona engendrada a un tronco de cono; luego el valor de la superficie de esta zona es

$$A = 2\pi y \, . \, ds$$

siendo (y) el valor que corresponde a la mitad del arco ds.

La superficie engendrada por el arco AB será la suma de las superficies engendradas por los arcos infinitesimales, luego

$$\text{Área superficie de revolución} = 2\pi \int_a^b y \, ds \qquad (1)$$

Pero de acuerdo a lo estudiado en "Rectificación de curvas", la longitud del arco (ds) es

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

reemplazando en (1), resulta

$$\text{Área superficie de revolución} = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

I) *Calcular el área de una superficie esférica.*

La mitad de la superficie esférica está engendrada por la rotación de un cuarto de circunferencia; por lo tanto, la curva está definida por la ecuación

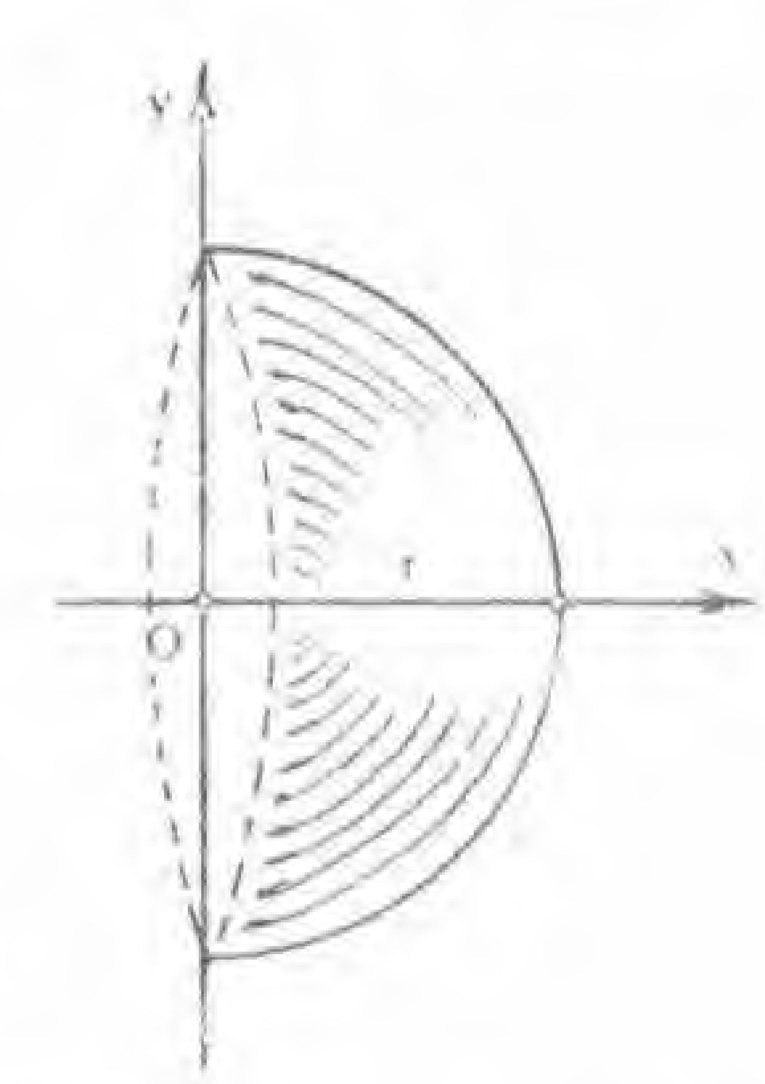
$$x^2 + y^2 = r^2$$

o bien

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Derivando

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



Aplicando la formula del artículo anterior, se tiene

$$\text{Area semiesfera} = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx$$

$$\text{Área semiesfera} = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^r r\, dx = 2\pi r \int_0^r dx$$

$$= 2\pi r\, [x]_0^r = 2\pi r\, [r - 0]$$

en fin

$$\text{Área semiesfera} = 2\pi r^2$$

Luego

$$\text{Área esfera} = 4\pi r^2$$

II) *Calcular el área de la superficie de revolución engendrada por la curva*

$$y^2 = x$$

al girar alrededor del eje de las abscisas en el intervalo (0,4).

R.: $A = 20{,}7$

III) *Calcular el área del elipsoide de revolución generado por la rotación de la elipse alrededor del eje* (x).

Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{12} = 1$$

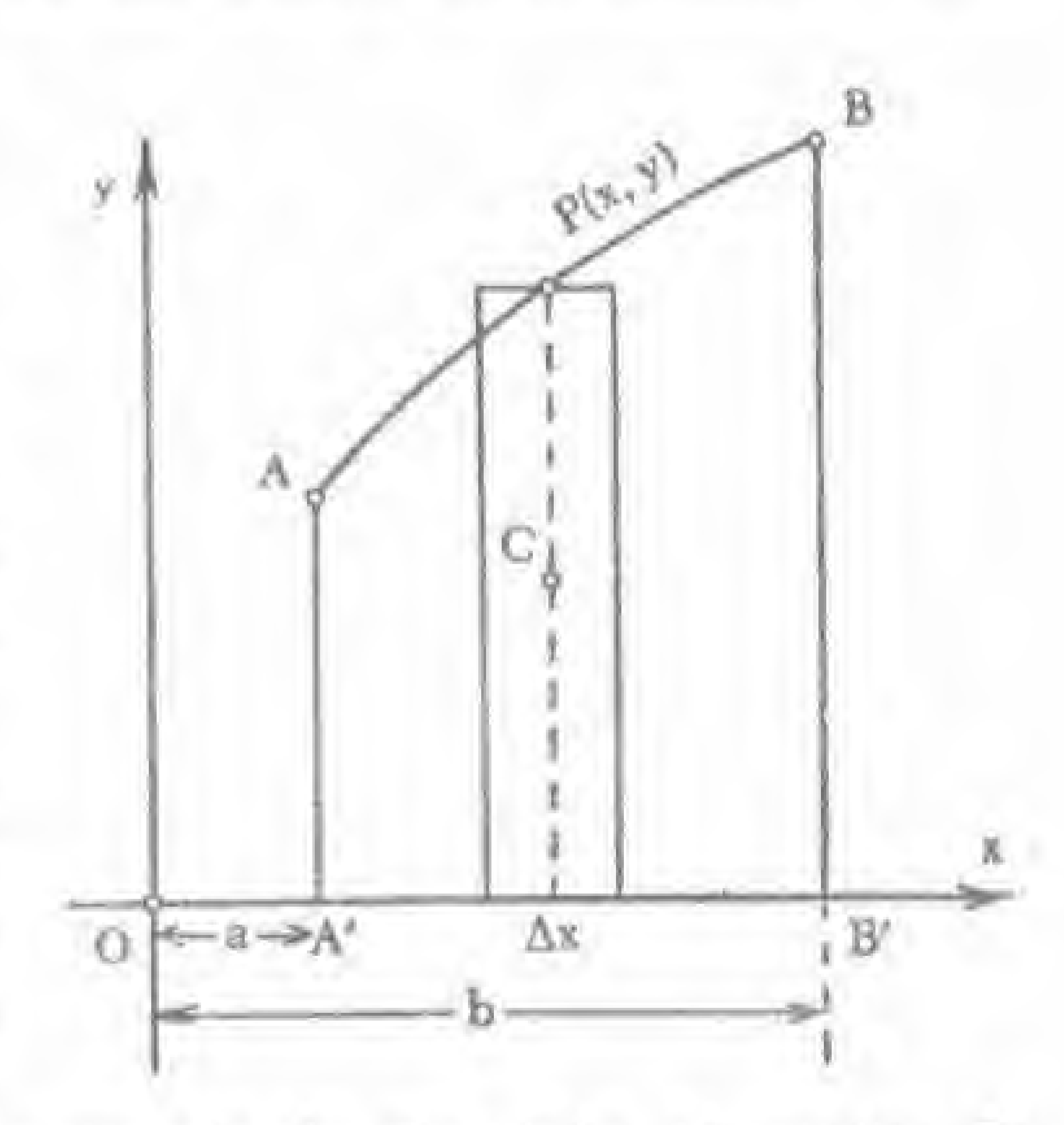
R.: $A \cong 53\pi$

IV) *Calcular el área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola* $y = x^2$ *desde* $y = 0$ *a* $y = 2$, *gira alrededor del eje de las ordenadas.*

R.: $A = \dfrac{13\pi}{3}$

CENTRO DE GRAVEDAD 12
Momentos de superficie

Un pedazo de latón plano y horizontal permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el *centro de gravedad* de la superficie plana del latón.



Para algunas superficies, cuadrado, rectángulo o círculo, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.

En general, si una figura plana tiene un centro de simetría, este punto es el centro de gravedad.

Si la figura plana tiene un eje de simetría, el centro de gravedad pertenece a dicho eje (*).

Determinación del centro de gravedad mediante el cálculo integral.

Consideremos la superficie A'APBB'. Dividámosla en

(*) El lector hallará datos sobre los *centros de gravedad* de figuras geométricas en el apéndice de "*Regla de Cálculo*", de los mismos autores.

(n) rectángulos, cada uno con base Δx. El dibujo enmarca uno de estos rectángulos.

Sea (d A) su área y c (h, k) su centro de gravedad.

Por lo tanto.

$$dA = y\,dx \quad ; \quad h = x \quad ; \quad k = \frac{1}{2} y \qquad \text{(I)}$$

Momento de masas aisladas. — Para una masa aislada (m), se llama *momento*, respecto de un eje o plano al producto (m d) de la masa por su distancia a este eje o plano.

Este concepto llamado también *momento estático* o *de primer orden* es esencial para estudiar *equilibrio;* si, por ejemplo, se colocan dos masas (m) y (m_1) en los extremos de una palanca que distan (d) y (d_1) del punto de apoyo o eje, la condición de equilibrio es que sean iguales los productos (m d) y ($m_1 d_1$), pero con signos contrarios, es decir, la suma de los momentos respecto del eje o punto de apoyo debe ser nula.

Ahora bien, siendo las masas proporcionales a las áreas, *los números que miden las masas son los mismos que miden las áreas, si se eligen unidades correspondientes,* y de aquí en adelante consideraremos *áreas* en vez de *masas.*

El *momento de la superficie* del rectángulo elemental de la figura A'APBB' con respecto al eje (x) o al eje (y) es el producto de su área (dA) por la distancia de su centro de gravedad a (x) o al eje (y).

Si estos momentos los designamos por ($d M_x$) y ($d M_y$), respectivamente, resulta

$$d M_x = k\, d A \qquad d M_y = h\, d A \qquad \text{(II)}$$

El momento de la superficie de la figura A'APBB' se obtiene aplicando la integral, por cuanto el *valor límite de una suma cuando* (n) *tiende a infinito y cada subintervalo tiende a cero, es igual al valor de una integral definida.*

O sea

$$M_x = \int k\, d A \qquad M_y = \int h\, d A \qquad \text{(III)}$$

Si ($\bar{x}$, $\bar{y}$) es el centro de gravedad de la figura en cuestión y (A) es su área, las relaciones entre los momentos de superficie (III) y ($\bar{x}$, $\bar{y}$) se determinan por

$$A \cdot \bar{x} = M_y \qquad A \cdot \bar{y} = M_x \qquad \text{(IV)}$$

Para hallar ($\bar{x}$, $\bar{y}$) determinaremos previamente (M_x) y (M_y).

Según (I) y (III) éstos son:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, d x \qquad M_y = \int_a^b x\, y\, d x \qquad \text{(V)}$$

en donde debe reemplazarse el valor de (y) en función de (x) deducido de la ecuación de la curva APB.

Si el área (A) es conocida por IV, se tiene

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{A}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{A}}$$

Si el área no se conoce, puede obtenerse por integración.

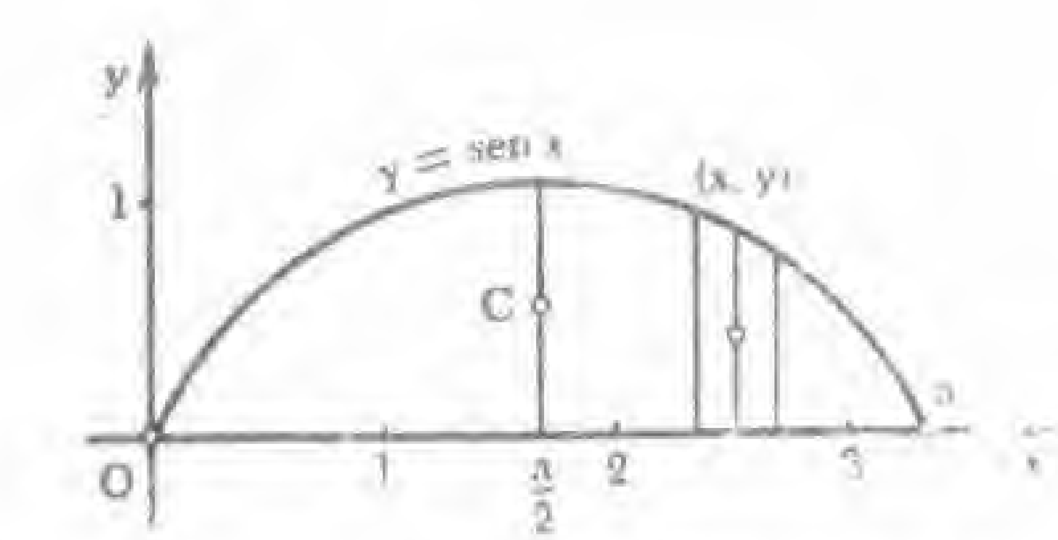
EJERCICIOS DE APLICACIÓN

I) *Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por una onda de sinusoide*

$$y = \operatorname{sen} x$$

Dibujemos un rectángulo elemental, tenemos

$$d A = y\, d x = \operatorname{sen} x\, d x$$



$$d\,M_x = k\,d\,A = \frac{1}{2}\,y^2\,d\,x$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\,x\,d\,x$$

$$d\,M_y = h\,d\,A = x\,y\,d\,x = x\,\text{sen}\,x\,d\,x$$

Siendo los límites $x = 0$ y $x = \pi$, resulta

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,d\,x = 2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}^2\,x\,d\,x = \frac{1}{4}\pi$$

$$M_y = \int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,x\,d\,x = \pi$$

luego

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{2}\pi} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{1}{8}\pi}$$

III) *Hallar el centro de gravedad (baricentro) de una superficie triangular.*

Consideremos un triángulo (b y h) tal que el eje de las ordenadas pasa por el vértice C y la base contenida en el eje de las (x).

Fácil resulta establecer que

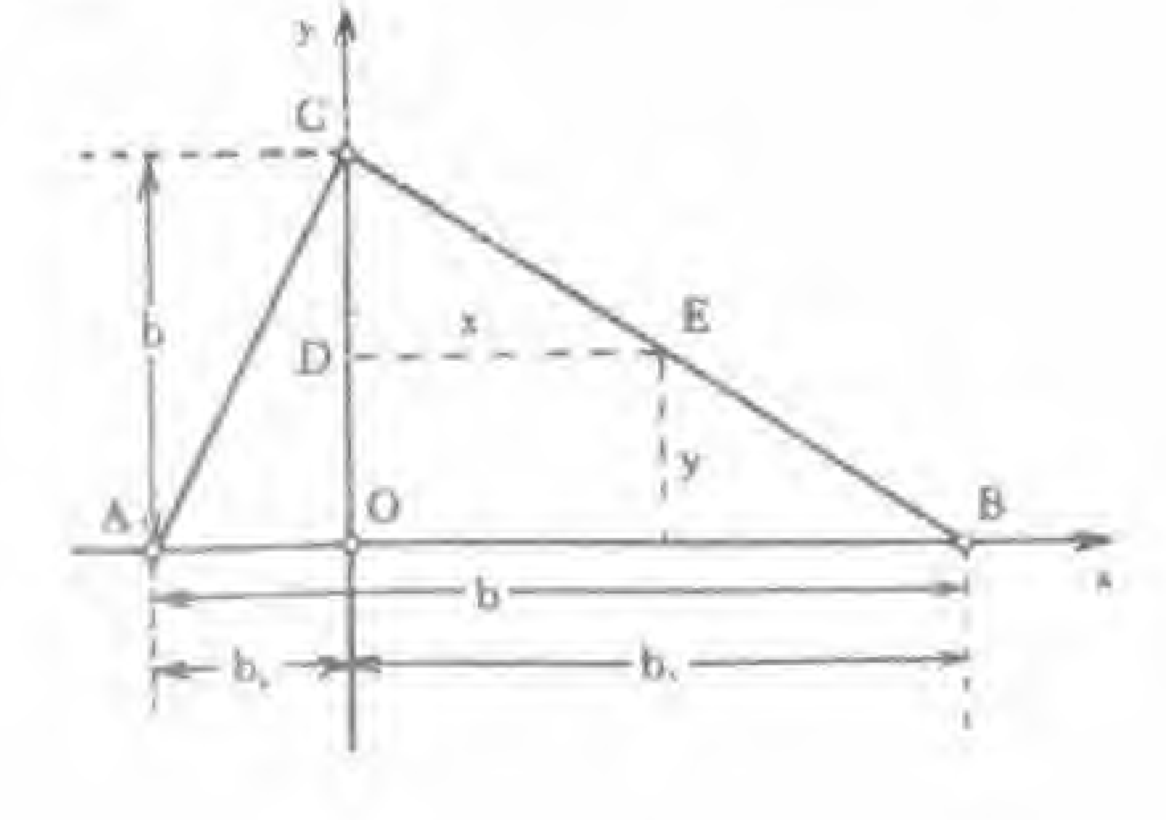
$$\overset{\triangle}{COB} \sim \overset{\triangle}{CDE}$$

luego

$$\frac{x}{h - y} = \frac{b_1}{h}$$

ó bien

$$x = \frac{b_1}{h}(h - y)$$



Por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\,d\,x = \int_h^0 y^2\,\frac{b_1}{h}\,(-d\,y) = \frac{b_1}{h}\int_0^h y^2\,d\,y$$

$$= \frac{b_1}{h}\,\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,b_1\,h^2$$

El cálculo con la otra parte del $\overset{\triangle}{ABC}$, resulta

$$\frac{1}{3}\,b_2\,h^2$$

y el total

$$\frac{1}{3}\,b_1\,h^2 + \frac{1}{3}\,b_2\,h^2 = \frac{1}{3}\,b\,h^2$$

y como el área total es

$$2\,A = 2\cdot\frac{b\cdot h}{2} = b\,h$$

resulta

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{3}\,b\,h^2}{b\,h}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{3}\,h}$$

es decir, el baricentro del triángulo se encuentra sobre la paralela al lado $\overline{AB}$ trazada a ⅓ de la altura correspondiente.

III) *Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por las curvas*

$$y = x^2 - 2\,x - 3$$
$$y = 6\,x - x^2 - 3$$

R.: (2, 1)

IV) *Hallar el centro de gravedad de la porción de elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



que está en el primer cuadrante.

$$R.: \ \overline{x} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \overline{y} = \frac{4b}{3\pi}$$

V) *Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por*

$$y = 2x - 4$$
$$y^2 = 4x$$

$$R.: \left(\frac{8}{5}, 1\right)$$

Momentos de inercia. — Se llama *momento de inercia* a la suma de los productos que resultan de multiplicar la masa de cada elemento de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a un punto o línea dados (*).

(*) *Momento de fuerza.* Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo que tiene un punto o un eje fijo, el cuerpo no puede trasladarse y está obligado a girar alrededor de dicho punto o eje. Si la dirección de la fuerza pasa por el punto o eje, no se produce movimiento y en el caso contrario se produce. Entonces el efecto de giro de la fuerza, depende no solamente de su intensidad sino también de la distancia a que se encuentra su dirección de dicho punto o eje.

Momento de la fuerza con respecto al punto $O = F \times OM$.

Obsérvese que el momento representa el doble del área OAB construido entre el punto y la fuerza.

En el caso de eje fijo se puede proyectar el eje y la fuerza sobre un plano, de manera que el eje sea normal al plano, y entonces se hallará el momento valiéndose de la fuerza proyectada.

La misma figura puede representar un eje que se proyecta en el punto O y una fuerza que se proyecta con la dimensión AB, entonces

$$M = \overline{OM} \times AB$$

Ejemplo: el caso de abrir una puerta: aplicando la mano en el puño de la puerta será mayor el brazo $(\overline{OM})$ del momento que si se aplica cerca del gozne, y por esto en el primer caso se abre con menos esfuerzo.

Para calcular momentos de inercia de líneas, superficies o volúmenes se procede en la misma forma que en el párrafo anterior.

Se divide el cuerpo en (n) partes cada una de masas (Δm_i) y si (r_i) es la distancia a un punto, a una recta o a un plano, el valor aproximado del momento de inercia será:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \, \Delta m_i$$

El límite cuando $n \to \infty$ y cada una de las partes elementales en que se ha descompuesto el cuerpo tiende a cero, es por definición el momento de inercia (I) del cuerpo, luego

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \, \Delta m_i$$

Cuando este límite exista, podremos calcular el momento de inercia mediante la integral definida

$$\boxed{I = \int_a^b r^2 \, dm}$$

siendo las masas proporcionales a las áreas, los números que miden las masas son los mismos que miden las áreas, si se eligen unidades correspondientes; por lo tanto, si hacemos

$$dm = \text{área} = y \, . \, dx$$

resulta

$$I_x = \int_a^b x^2 \, . \, y \, dx \quad \text{y análogamente} \quad I_y = \int_a^b y^2 \, x \, dy$$

representa el *momento de inercia* respecto del eje (x). Estas expresiones sólo difieren de las análogas del momento estático en que el exponente de la distancia (x) es 2, por eso se llaman de *segundo orden* los momentos de inercia.

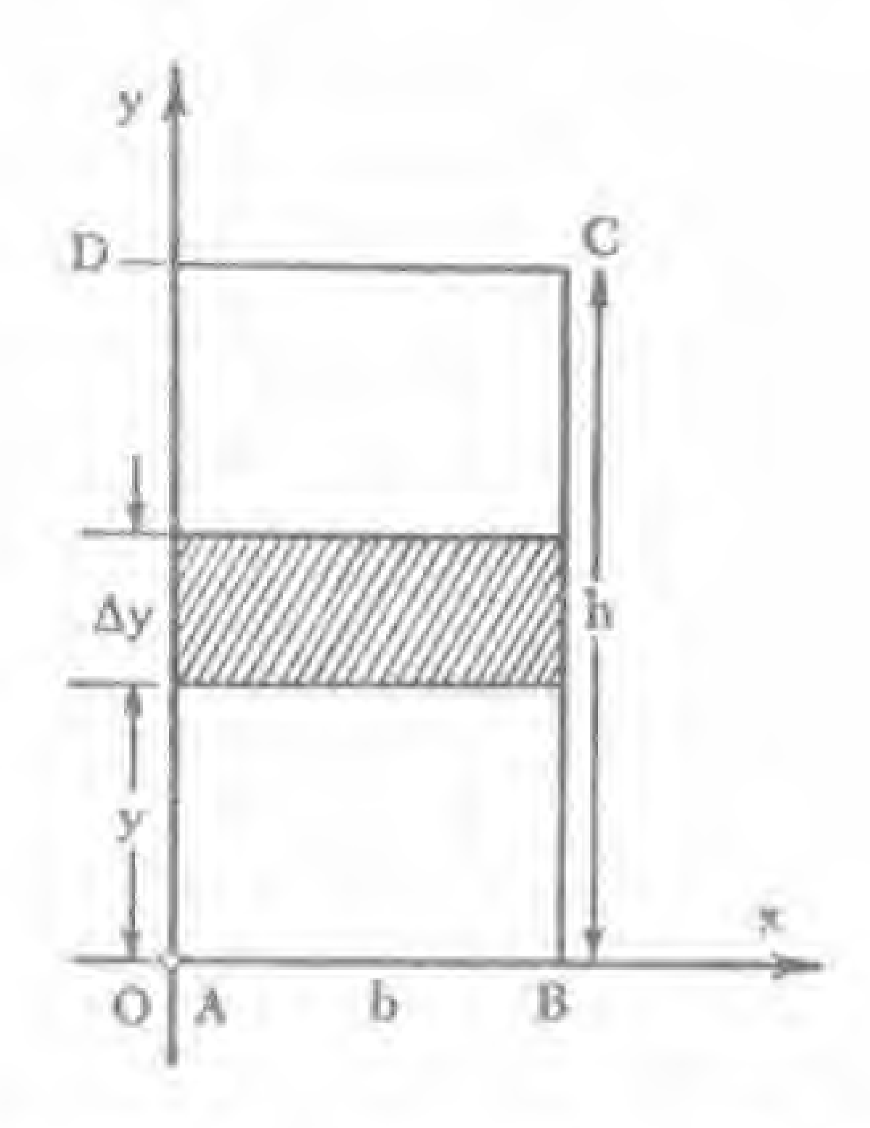
Así como los momentos estáticos pueden ser nulos y ne-

gativos, los momentos de inercia son siempre positivos porque tanto el área como los cuadrados de distancias son positivos.

El conocimiento de momentos estáticos, de momentos de inercia, etc., es fundamental para el estudio de resistencia de materiales, construcciones navales, mecánica racional, etc.

Ejercicios

I) *Momento de inercia del rectángulo* ABCD *respecto a la base* (b).



Consideremos el caso en que la base $AB = b$ esté contenida en el eje de las (x).

Un elemento (Δm) situado a una distancia (y) de la base

$$\Delta m = b \,.\, \Delta y \,.\, \delta$$

siendo (δ) la densidad superficial, el momento de inercia será

$$I = \int_0^h \delta \,.\, b \,.\, y^2 \, dy = \delta b \int_0^h y^2 \, dy$$

$$= \delta b \left| \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \delta b h^3 = \frac{1}{3} (\delta b \,.\, h) h^2$$

Si (M) representa la masa total que es igual al producto de la superficie (b, h) por la densidad (δ), resulta

$$\boxed{I = \frac{M h^2}{3}}$$

II) *Hallar el momento de inercia del área del círculo de radio* (r) *respecto a un diámetro.*

R.: $I = \frac{1}{4} \pi r^4$

III) *Calcular el momento de inercia* (I_x) *para el área limitada por el eje de las* (x) *y la curva*

$$x^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad x = 2$$

R.: $I_y = \pi$

IV) *Calcular el momento de inercia axial respecto al eje* (x) *de la superficie limitada por dicho eje y la curva*

$$y = -x^2 + 1$$

R.: 0,30

V) *Determinar el momento de inercia de un sector circular respecto del eje* (x) *cuando el vértice coincide con el origen de coordenadas y el punto medio del arco pertenece al eje de las* (y).

R.: $I_x = \varrho \frac{R^4}{4} \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \alpha_0 \right)$

VI) *Determinar el momento de inercia de una parábola "acostada" con respecto a su eje:* $y^2 = 2 p x$.

R.: $I_x = (\sqrt{2p})^3 \, \frac{2 \varrho}{15} \, x_0^{\frac{5}{2}}$

VII) *Determinar el momento de inercia de un rectángulo respecto a los ejes* (x) *e* (y).

R.: $I_x = \varrho \frac{a^2}{3} \cdot A$

$I_y = \varrho \frac{4 b^2}{3} A$



GEOMETRÍA ANALÍTICA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Las coordenadas son el armazón de la geometría analítica, las intermediarias entre los números, las magnitudes y el movimiento.

La palabra "coordenadas" no proviene de Descartes ni de Fermat, sino que es una de las felices formaciones verbales del genio alemán Leibniz, que la empleó por vez primera en la revista *Acta eruditorum*.

El descubrimiento casi simultáneo de la geometría analítica se debe a Descartes y a Fermat, quienes estaban interesados en la creación de un principio uniforme en la geometría: Fermat, desde el ángulo matemático puro; Descartes, desde un punto de vista filosófico.

La geometría griega no poseía tal unidad; cada teorema, cada construcción aparecían más bien como una creación artística que como la aplicación de principios generales. Fermat y Descartes intuían que detrás de estas o aquellas construcciones yacían relaciones ocultas. Como consecuencia, descubrieron la clave en el campo del álgebra y procedieron a *algebrizar la geometría*, y el resultado fue la geometría analítica. Establecieron los fundamentos del método y así los famosos problemas de la antigüedad fueron liquidados por Descartes: Todo problema que se traduce en una ecuación de primer grado es susceptible de resolución geométrica con el empleo único de la regla; una construcción con regla y compás implica resolver una ecuación de segundo grado; pero si un problema conduce a una ecuación irre-

ducible de grado superior al segundo, su solución geométrica no es factible por medio de la regla y del compás solamente.

Ni Descartes ni Fermat sospechaban que estaban edificando los cimientos de una nueva matemática.

Las características esenciales del pensamiento matemático moderno son la permanencia de las leyes formales y el principio de correspondencia. La primera condujo a la generalización del concepto de *número;* la segunda permitió establecer una relación de parentesco entre dos ramas de la matemática: la aritmética y la geometría.

Además Descartes supuso implícitamente que entre los puntos de un plano y el conjunto de todos los pares de números reales puede ser establecida una correspondencia perfecta.

Esta disciplina abrió los canales para los descubrimientos del cálculo infinitesimal, la teoría de las funciones, la mecánica y la física; y es tal su fuerza potencial que sugiere nuevos problemas y predice sus resultados y su empleo se ha transformado en una herramienta indispensable para la investigación.

COORDENADAS EN EL PLANO 1

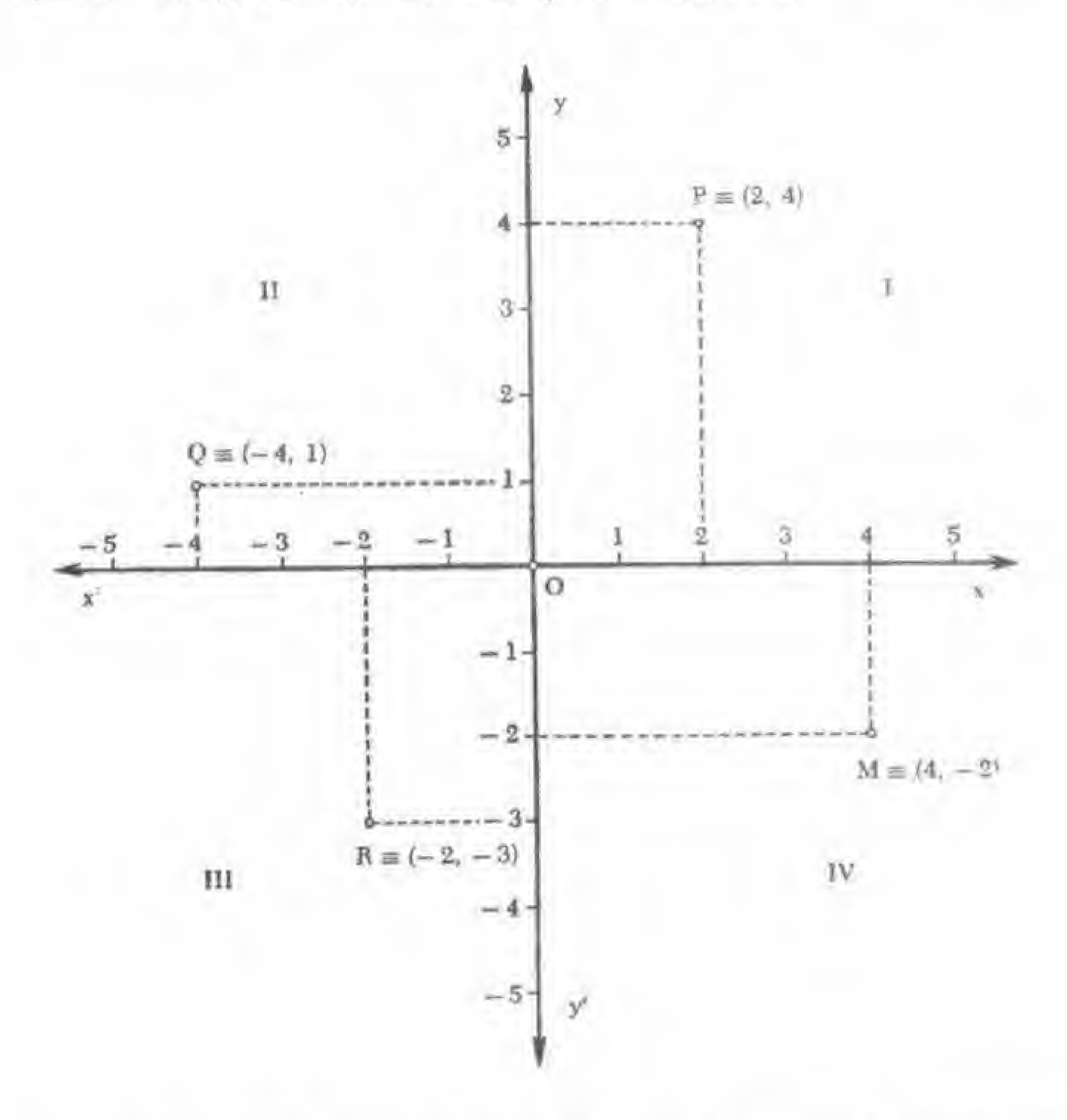
Coordenadas cartesianas rectangulares. — Para fijar la posición de un punto sobre un plano basta conocer sus distancias a dos elementos fijos del mismo. En el sistema cartesiano los elementos fijos son dos rectas orientadas que se cortan perpendicularmente, y se denominan *ejes coordenados;* el punto de intersección se llama *origen de coordenadas.*

Dado un sistema cartesiano el plano queda dividido en cuatro porciones, que se denominan *cuadrantes.* Para poder operar con ellos se conviene en numerarlos siguiendo el movimiento contrario al de las agujas de un reloj. Se elige una unidad por medida y se escriben sobre cada eje los números correspondientes a los segmentos de ejes tomados desde el origen.

Los números del eje horizontal se llaman *abscisas* y los números del otro eje son las *ordenadas.* Se considera que las abscisas son positivas si figuran a la derecha del eje de ordenadas y negativas las medidas a la izquierda. Análogamente son positivas las ordenadas del plano superior al eje de abscisas y son negativas las del plano opuesto.

Se infiere fácilmente que todo punto del plano queda determinado por dos números, abscisa y ordenada, que corresponden a las perpendiculares a los ejes bajadas desde dicho punto.

En el dibujo están representados los puntos $P \equiv (2, 4)$, $Q \equiv (-4, 1)$, $R \equiv (-2, -3)$ y $M \equiv (4, -2)$.

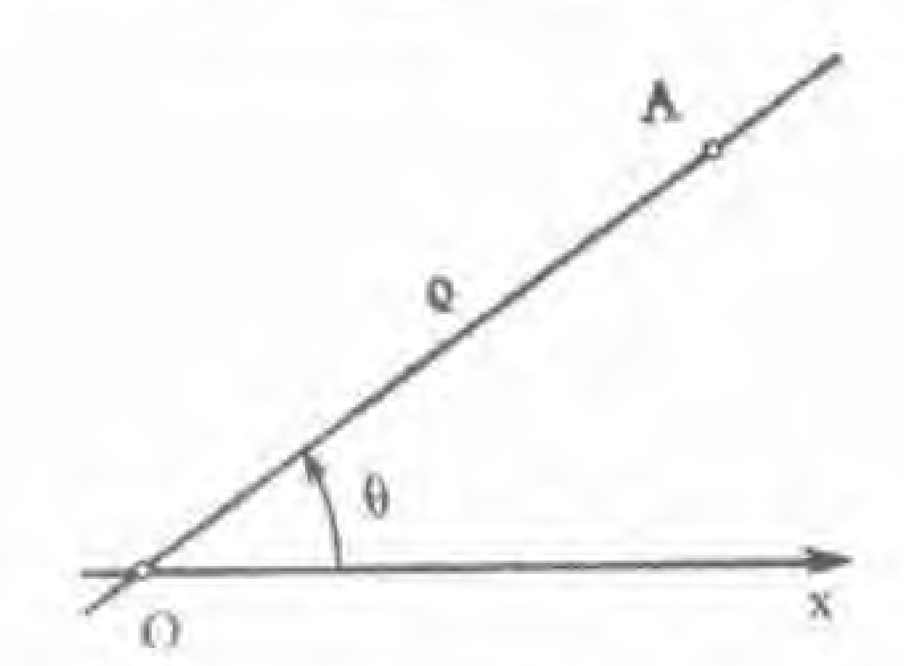


Dado que las abscisas y las ordenadas son números reales, queda establecida una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números reales, es decir: *a cada punto del plano le corresponde un par de números reales y a cada par de números reales le corresponde un punto del plano.*

Esta correspondencia es el fundamento de la Geometría Analítica.

Coordenadas Polares

Sea un punto origen O, denominado polo y una semirrecta $\overrightarrow{OX}$, llamada *eje polar*. Se fija, además, el *sentido*



positivo de las rotaciones, coincidentes con el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Un punto cualquiera A del plano queda determinado al conocer la distancia $\overline{OA}$ y el ángulo θ que indica la posición del segmento $\overline{OA}$ respecto al eje.

El número positivo ρ que mide al $\overline{OA}$ se denomina *radio vector* del punto A. La amplitud del ángulo θ es la *anomalía o argumento* del punto dado. Las cantidades ρ y θ son las coordenadas polares del punto A y se simboliza

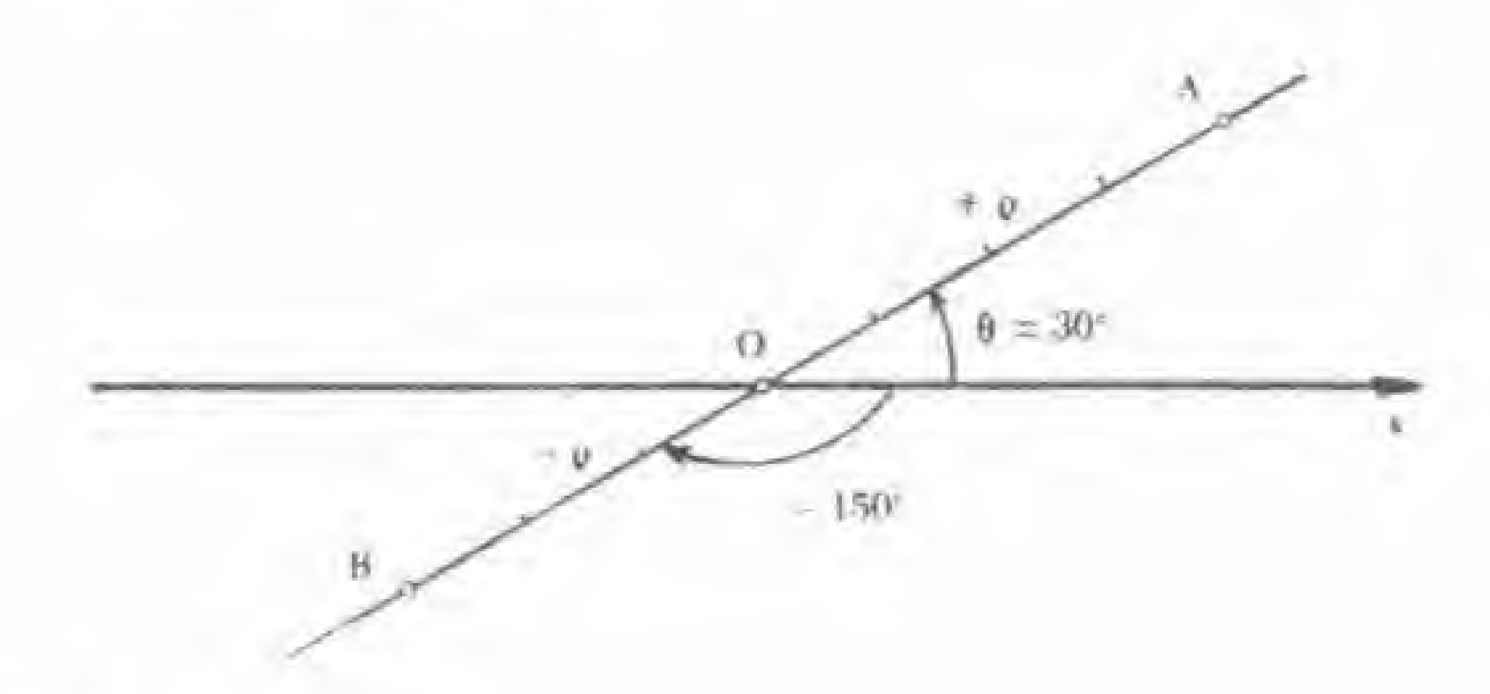
$$A\ (\rho, \theta)$$

Vale decir, que a cada punto de la superficie le están coordinados biunívoca y continuamente una longitud y un ángulo, o sea dos magnitudes.

Este sistema resulta muy ventajoso para el análisis de las curvas arrolladas como las espirales, etc.

En general ρ puede tomar cualquier valor real *positivo* y θ cualquier valor comprendido entre 0° y 360°. (Coordenadas polares elementales.)

A veces suele establecerse para las dos coordenadas el signo positivo y el negativo, como ilustra el grabado. (Coordenadas polares generales.)



Por lo tanto:

A (4, 30°).
B (— 3, — 150°).

Cuando se opera con puntos próximos al eje polar en semiplanos opuestos del mismo, se observa que corresponden diferencias notables entre los argumentos; por lo tanto, no existe *continuidad* en la correspondencia como establece la definición. Causa por la cual se sacrifica la biunivocidad y se admite que los radios vectores y argumentos varíen entre $-\infty$ y $+\infty$. (Coordenadas polares generales.)

Ejercicios

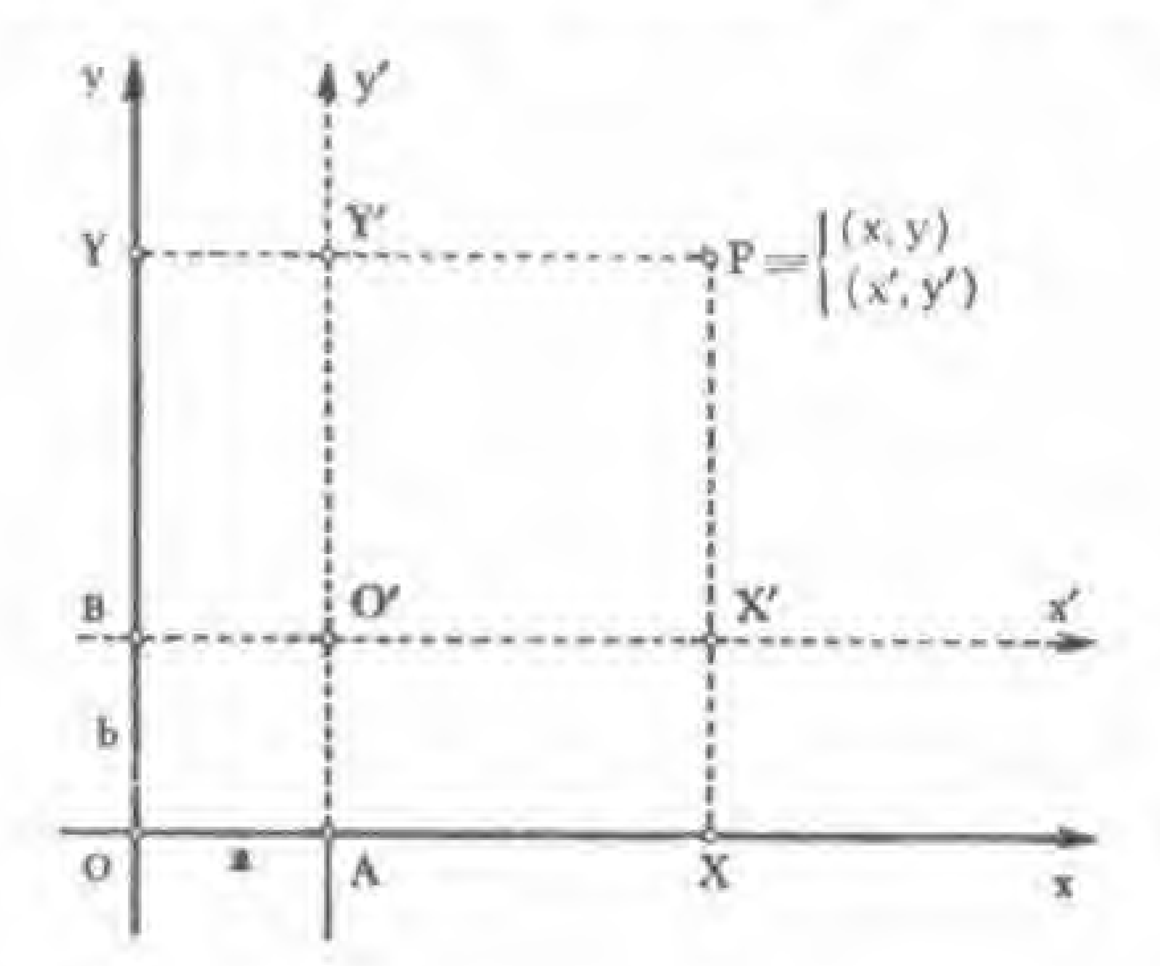
1) Fijar en coordenadas polares los puntos siguientes:

$(5, 75°)$, $(7, 270°)$; $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

Transformación de coordenadas cartesianas

Traslación paralela de los ejes. — Si tomamos, respecto de un sistema cartesiano (x, y), un punto arbitrario $O' \equiv (a, b)$ y por éste trazamos dos ejes $(x' y')$ paralelos e igualmente

orientados que los primeros, se dice que el nuevo sistema deriva del primero por una traslación paralela.



Resulta que

$$x = \overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX} = a + \overline{O'X'} = a + x'$$
$$y = \overline{OY} = \overline{OB} + \overline{BY} = b + \overline{O'Y'} = b + y'$$

de manera que las fórmulas inversas son

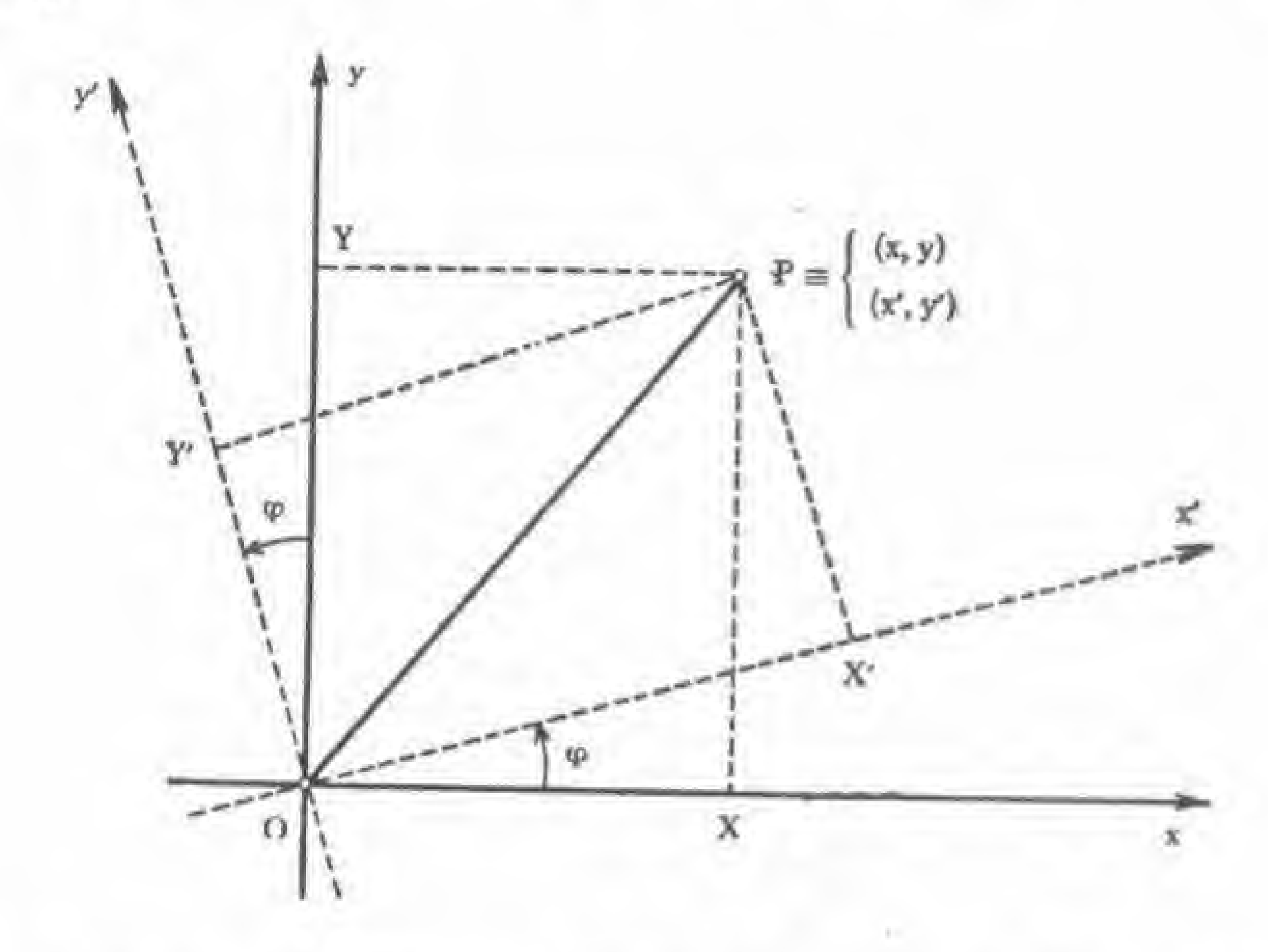
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}}$$

De estas relaciones, se infieren las fórmulas directas

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}}$$

Rotación de ejes ortogonales alrededor del origen. — Sea un sistema ortogonal (x, y) de origen O; si por él trazamos dos ejes (x', y') tales que $\widehat{xx'} = \widehat{yy'} = \varphi$ se obtendrá un nuevo sistema ortogonal (x', y'), el cual se dice deriva del

primero por una rotación de amplitud (φ) alrededor del origen.



El segmento $\overline{OP}$, puede considerarse como la resultante de la poligonal OX'P.

Dado que la proyección de la resultante de una poligonal es igual a la suma de las proyecciones de las componentes, resulta

$$x = \overline{OX} = \text{proy.}_x\ \overline{OP} = \text{proy.}_x\ \overline{OX'} + \text{proy.}_x\ \overline{X'P}$$

o bien

$$x = \text{proy.}_x\ \overline{OX'} + \text{proy.}_x\ \overline{OY'}$$

pero como la proyección de un segmento sobre un eje es igual al producto del valor absoluto del segmento dado, por el coseno del ángulo de dirección, se tiene

$$\boxed{x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi} \qquad (1)$$

Además

$$y = OY = \text{proy.}_y\ \overline{OP} = \text{proy.}_y\ \overline{OX'} + \text{proy.}_y\ \overline{X'P}$$

o sea

$$y = \text{proy.}_y\ \overline{OX'} + \text{proy.}_y\ \overline{OY'}$$

pero por la propiedad de las proyecciones mencionadas en el párrafo anterior, resulta

$$y = x' \cos(90° - \varphi) + y' \cos\varphi$$

o bien

$$\boxed{y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi} \qquad (2)$$

Las relaciones (1) y (2) son las fórmulas *inversas* del problema.

Para obtener las ecuaciones *directas* basta observar que del sistema (x' y') se pasa al (x, y) por una rotación alrededor del origen de amplitud ($-\varphi$); luego las fórmulas directas se deducen reemplazando en (1) y en (2) el argumento por ($-\varphi$).

Luego

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi \\ y' &= -x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}}$$

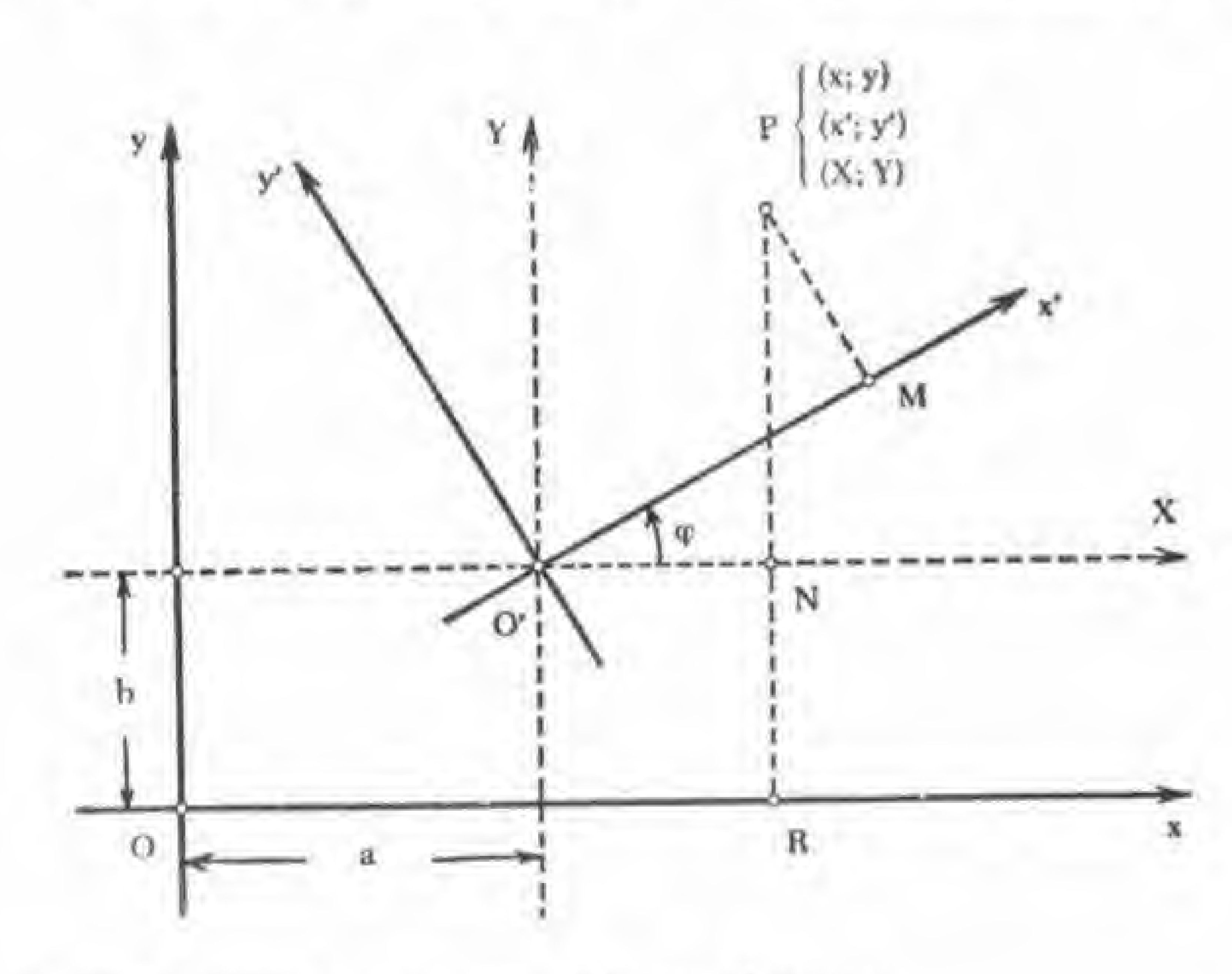
Transformación general de coordenadas cartesianas rectangulares. — Sean (x, y), (x', y') dos sistemas de ejes ortogonales. La posición del segundo respecto del primero estará definida cuando se conozcan las coordenadas del nuevo origen $O' \equiv (a, b)$ y el ángulo $\varphi = \widehat{xx'}$ que determinan los ejes de abscisas.

Construyendo un sistema auxiliar (X, Y), se puede establecer

$$(1) \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

y también

$$(3) \begin{cases} X = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi \\ Y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} x' = X \cos\varphi + Y \operatorname{sen}\varphi \\ y' = -X \operatorname{sen}\varphi + Y \cos\varphi \end{cases}$$



Reemplazando (3) en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi + a \\ y &= x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi + b \end{aligned}$$

que son las fórmulas *inversas*.

Sustituyendo X e Y por sus valores (2) en la relación (4), se tiene

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos\varphi + (y - b) \operatorname{sen}\varphi \\ y' &= -(x - a) \operatorname{sen}\varphi + (y - b) \cos\varphi \end{aligned}$$

que son las ecuaciones *directas*.

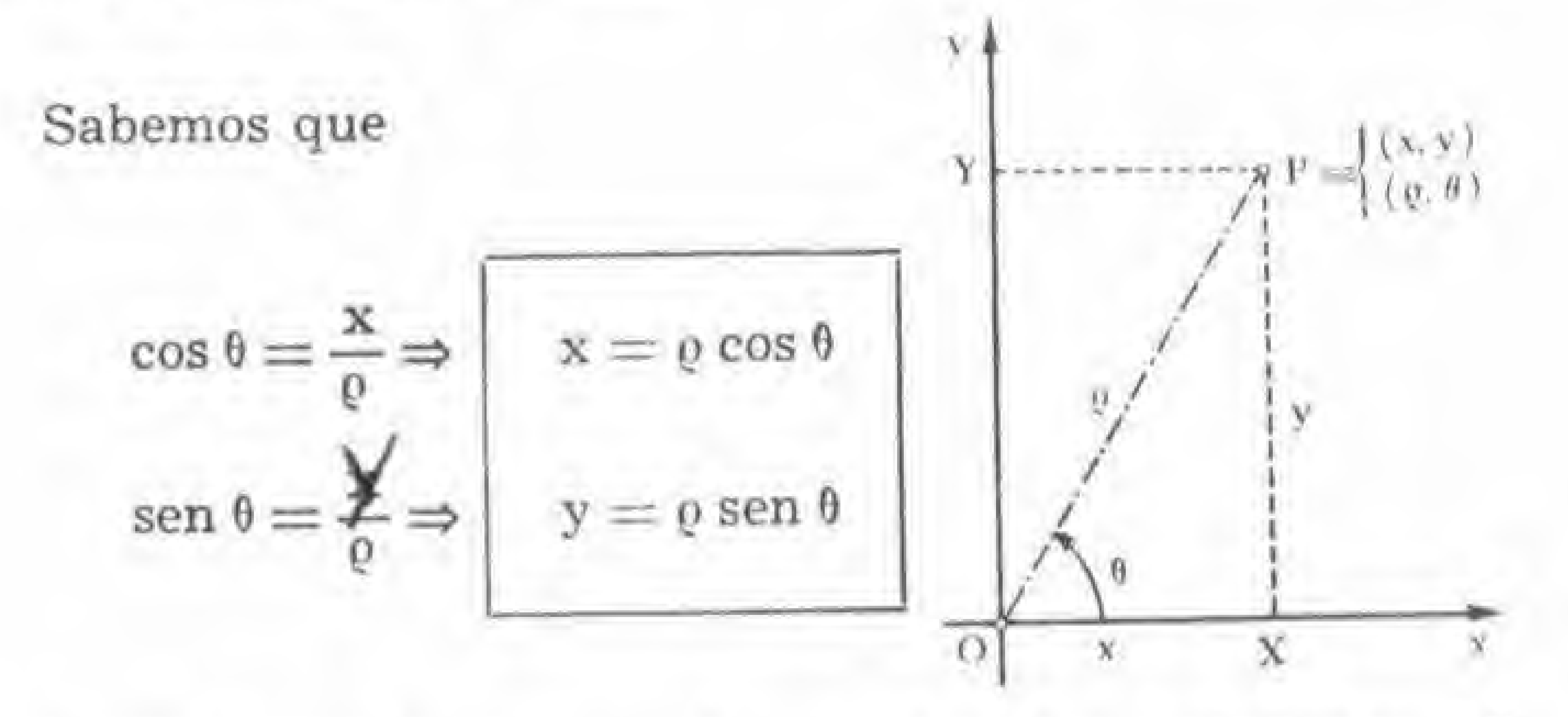
Fórmulas de pasaje de las coordenadas cartesianas a polares y viceversa

Supongamos un sistema cartesiano al cual se encuentra agregado un sistema polar, cuyo polo coincide con el origen del sistema ortogonal y cuyo eje polar se superpone al semieje positivo de abscisas.

Sabemos que

$$\cos\theta = \frac{x}{\varrho} \Rightarrow \quad x = \varrho \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\varrho} \Rightarrow \quad y = \varrho \operatorname{sen}\theta$$



Estas fórmulas expresan las coordenadas cartesianas del punto en función de las coordenadas polares.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$\varrho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

que son las fórmulas que expresan las coordenadas polares en función de las cartesianas.

De la solución de este problema particular resulta luego la solución del problema general, combinando estos resultados con los que se refieren a un cambio general de ejes cartesianos.

Ejercicios

I) *Hallar las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas ortogonales se señalan a continuación:*

A (4 ; 3)	R.: A (5 ; 36°50′)
B (1 : 1)	R.: B ($\sqrt{2}$; 45°)
C (6 ; 8)	R.: C (10 ; 53°10′)
D (— 1 ; 1)	R.: D ($\sqrt{2}$; 135°)

II) *Calcular las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares se indican a continuación:*

A (4 ; 45°)	R.: A ($2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$)
B (10 ; 30°)	R.: B ($5\sqrt{3}$; 5)
C (2 ; 60°)	R.: C (1 ; $\sqrt{3}$)
D (5 ; 180°)	R.: D (— 5 ; 0)

III) *Determinar las ecuaciones polares de las curvas que tienen las siguientes ecuaciones cartesianas:*

a) $y^2 = 2x$ R.: $\varrho = \dfrac{2 \cot g\, \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$

b) $x^2 - y^2 = 1$ R.: $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

c) $xy = k^2$ R.: $\varrho = \dfrac{k}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}}$

IV) *Hallar las ecuaciones cartesianas de las curvas cuyas ecuaciones polares son:*

a) $\varrho \cos \varphi = 10$ R.: $x = 10$

b) $\varrho = 6 \operatorname{sen} \varphi$ R.: $x^2 + y^2 - 6y = 0$

c) $\varrho = 3$ R.: $x^2 + y^2 - 9 = 0$

V) *Calcular las coordenadas de los puntos siguientes cuando los ejes giran alrededor del origen un ángulo* θ:

a) A (0 ; 4) y $\theta = 60°$ R.: A ($2\sqrt{3}$; 2)

b) B ($2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$) y $\theta = 45°$ R.: B (4 ; 0)

VI) *Calcular las coordenadas del punto* P (2 ; 5) *referidas a un sistema* (X′ Y′) *de origen* O′ (3 ; — 2) *con respecto al sistema* (X Y).

R.: $x = 2 + 3 = 5$
$y = 5 - 2 = 3$

VII) *Calcular las coordenadas de los puntos siguientes, cuando los ejes se trasladan al origen y giran alrededor de él un ángulo* θ:

a) A (— 5 ; 1) ; O′ (— 4 ; 2) ; $\theta = 180°$ R.: A (1 ; 1)

b) B (— 4 ; 3) ; O′ (1 ; 3) ; $\theta = 90°$ R.: B (0 ; 5)

VIII) *El punto* (P) *tiene como coordenadas* (4 ; 2) *referidas a un par de ejes rectangulares. Si estos ejes giran un ángulo de 30° ¿cuáles son las nuevas coordenadas del punto dado?*

R.: P ($1 + 2\sqrt{3}$; $\sqrt{3} - 2$)

IX) *Determinar las nuevas coordenadas del punto* M (3 ; 4) *cuando se eligen como ejes las bisectrices de los ejes primitivos.*

R.: M $\left[\dfrac{7\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

X) Determinar valor de la abscisa de P (x, 5) para que dicho punto sea equidistante de A (3, —4) y B (—4, 3).

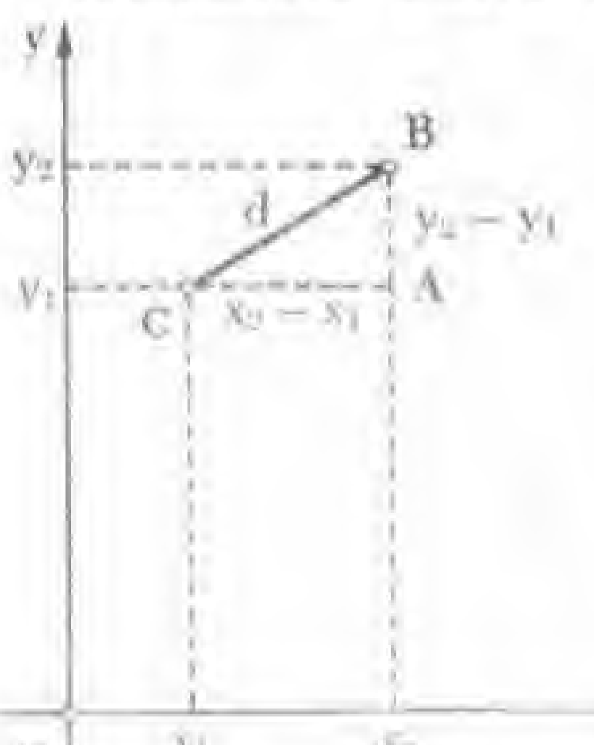
R.: $x = 5$

2 ECUACION DE LA LINEA RECTA

De la misma forma que a un punto corresponde un par de números reales, se intuye que a un lugar geométrico —recta, circunferencia, parábola, etc.— debe corresponder una ley especial que puede representarse analíticamente.

La Geometría Analítica tiene por objeto estudiar algebraicamente los conjuntos de puntos que expresan figuras geométricas y resolver los problemas geométricos empleando recursos analíticos.

Distancia entre dos puntos. — El problema que se presenta cuando se conocen dos puntos es determinar su *distancia*. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) los puntos y (d) la distancia entre ellos.



El segmento **(d)** representa la hipotenusa del CAB rectángulo que tiene como catetos la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas. En consecuencia, por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

o bien

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejercicios

I) A (3, 4) ; B (8, 4).

Solución

$$d = \text{med } \overline{AB} = \sqrt{(8-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{5^2} = |\pm 5| = 5$$

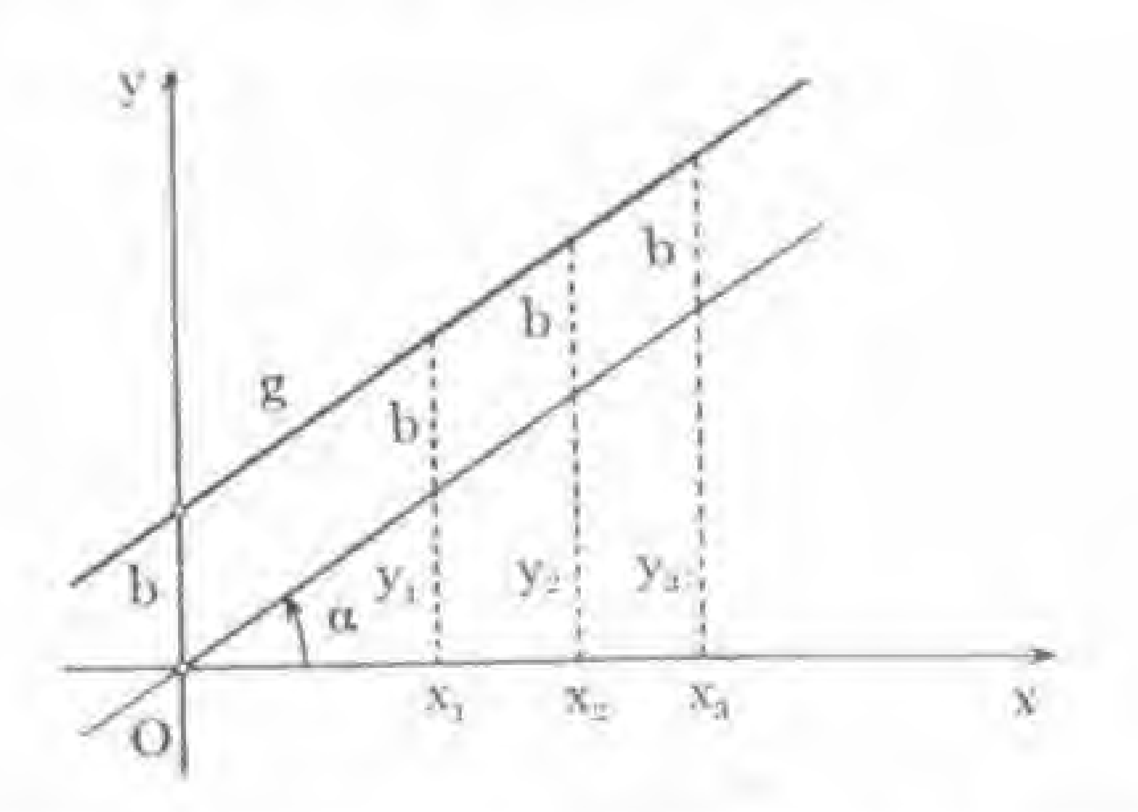
II) A (10 ; 6) ; B (10 ; — 5)
R.: d = 11

III) A (2 ; 10) ; B (6 ; 13)
R.: d = 5

IV) O (0 ; 0) ; A (6 ; — 8)
R.: d = 10

Ecuación Explícita de la Recta

I) *Recta que corta el origen.* — Consideremos una recta que pase por el origen de coordenadas.



El conjunto de puntos de la recta dada cumple con la condición de que sus ordenadas y_1, y_2, y_3 forman con sus abscisas x_1, x_2, x_3, una serie de triángulos rectángulos seme-

jantes, de ángulo común α, por lo que sus catetos son proporcionales. Denominando (m) al coeficiente de proporcionalidad, se infiere que

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = \frac{y}{x} = m$$

La expresión matemática que define este conjunto, es la ecuación de primer grado

$$\boxed{y = m\,x}$$

El coeficiente (m) es la tangente del ángulo α, es decir

$$m = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

de manera que depende exclusivamente del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas; por tal motivo se llama *coeficiente angular* o *pendiente*.

II) *Recta que no pasa por el origen.*— Si la recta (g) no corta el origen, ver figura anterior, es forzosamente paralela a otra que pasa por el origen y que tiene la misma pendiente; sus ordenadas difieren en una cantidad constante que denominaremos (b). Cada ordenada de la recta dada se obtendrá sumando a la ordenada correspondiente de su paralela la constante (b), que puede ser positiva o negativa; por lo tanto, la ecuación explícita que define a la recta (g) es

$$\boxed{y = m\,x + b}$$

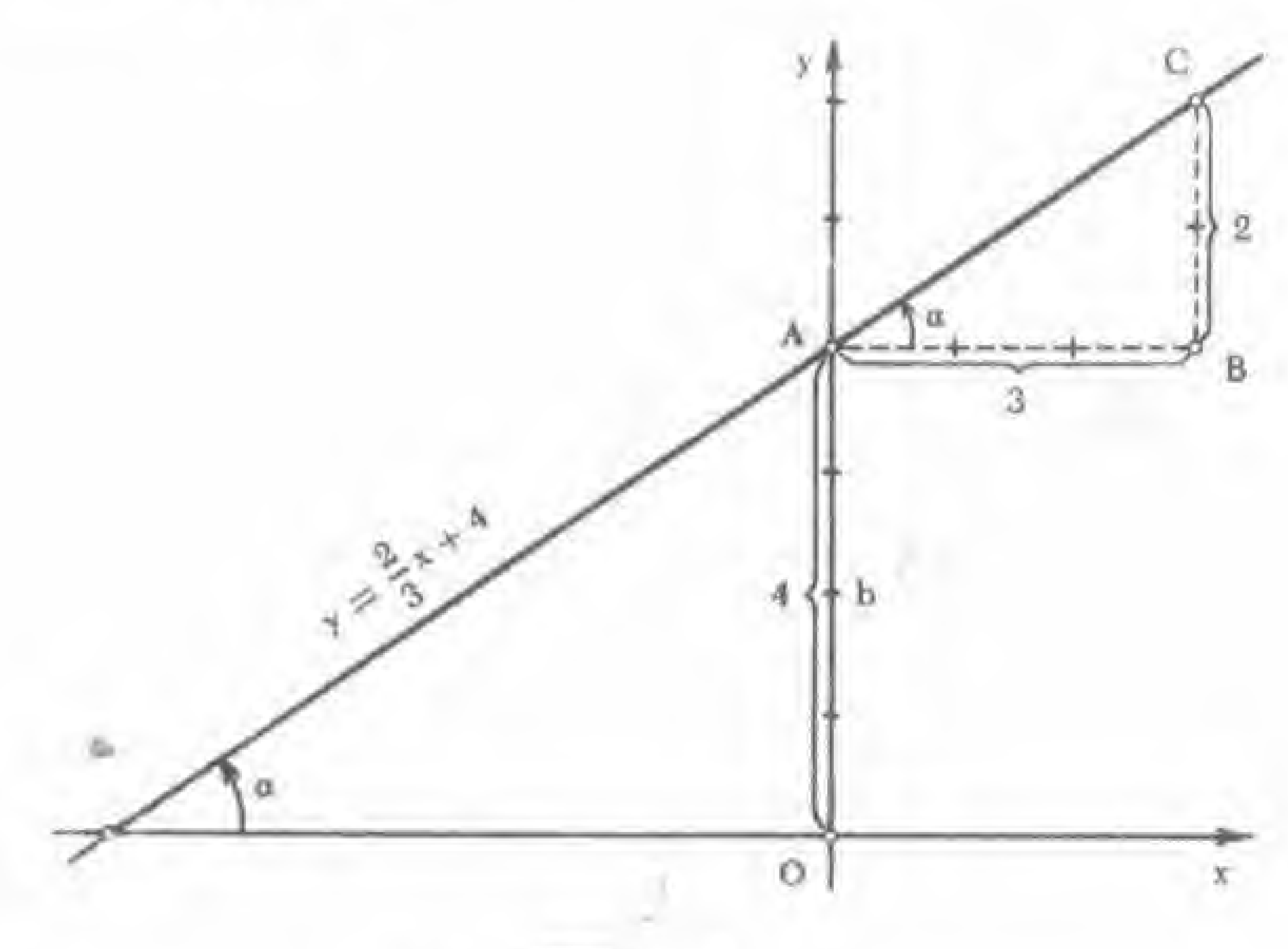
Es evidente que (b) es la *ordenada en el origen*, o sea en el punto x = 0.

Ejercicios

I) *Graficar la recta de ecuación:*

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

Datos $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ b = 4 \end{cases}$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} = m$$

II) ***Representar la recta cuya ecuación es:***

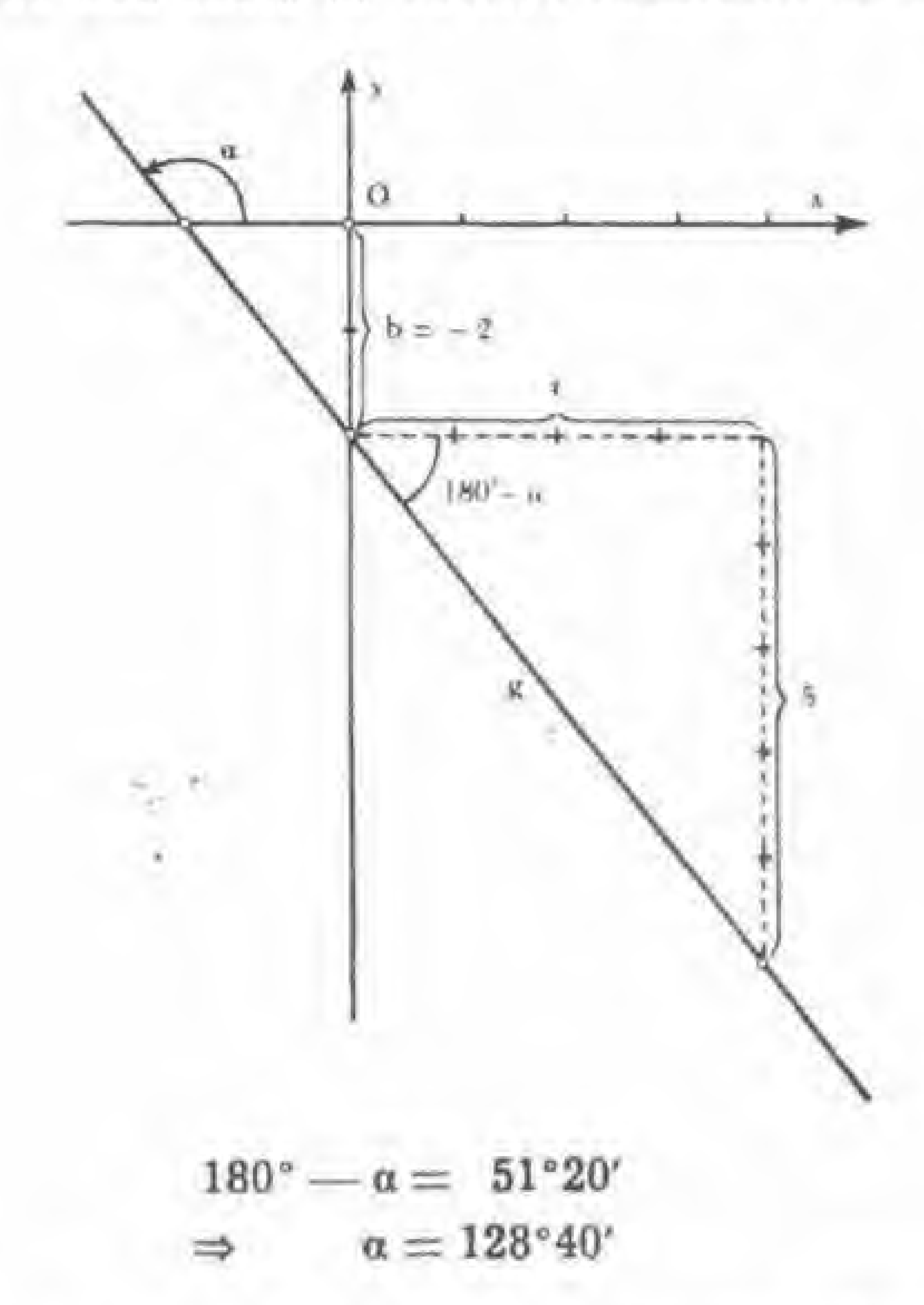
$$y = -\frac{5}{4}x - 2$$

Datos $\begin{cases} m = -\frac{5}{4} \\ b = -2 \end{cases}$

Observación:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{-5}{4} = -1{,}25$$

Consultando una tabla de valores naturales, se obtiene:



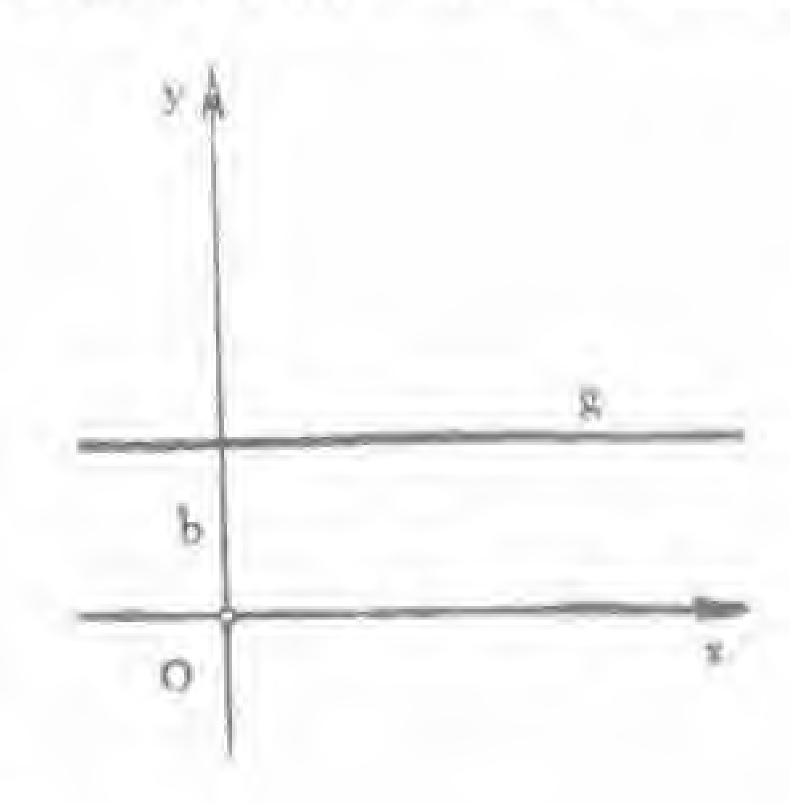
$$180° - \alpha = 51°20'$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 128°40'$$

III) *Casos particulares.* — La ecuación de primer grado

$$y = m\,x + b \qquad (1)$$

define la recta, de manera tal que los números o parámetros (m) y (b) determinan su posición.

Cuando $m = 0$ la ecuación (1) se reduce a



$$y = b \qquad (2)$$

en la que para cualquier valor de x sus ordenadas son iguales, es decir, que es *paralela al eje de abscisas*

El eje de abscisas es una recta del tipo (2), cuya ordenada en el origen es cero, por lo que su ecuación es

$$\mathbf{y = 0}$$

Análogamente, cuando las abscisas sean constantes para todas las ordenadas, o sea

$$\mathbf{x = c} \qquad (3)$$

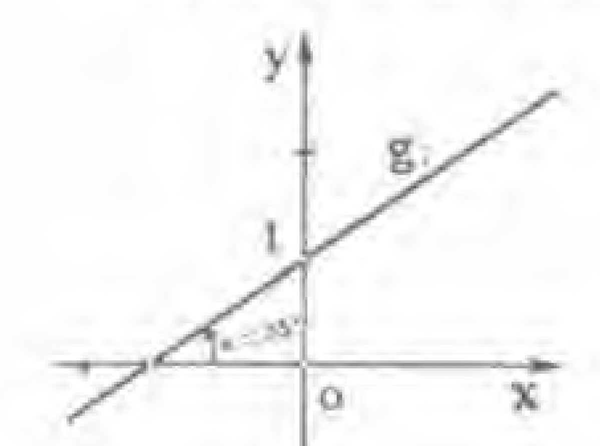
la recta es paralela al eje de ordenadas.

Cuando $c = 0$ la ecuación (3) definirá el eje de ordenadas, es decir

$$\mathbf{x = 0}$$

Ecuación General de la Recta

Toda recta está representada por la ecuación lineal



$$y = m\,x + b$$

La ecuación de la recta (g) del grabado se construye colocando el valor de la tangente del ángulo α como coeficiente de (x) y midiendo la ordenada en el origen se coloca su valor como constante.

$$y = 0{,}7\,x + 1$$

o bien

$$0{,}7\,x - y + 1 = 0$$

y, por lo tanto, la *ecuación general* *implícita* es

$$\boxed{A x + B y + C = 0} \qquad (1)$$

Ahora, como problema inverso veamos si toda ecuación de primer grado con dos incógnitas define una recta.

Despejando (y) en la ecuación (1), resulta

$$y = -\frac{A}{B} x - \frac{C}{B} \qquad (2)$$

en la cual

$$-\frac{A}{B} = m \qquad y \qquad -\frac{C}{B} = b$$

por lo tanto, la ecuación (2) se convierte en

$$y = m x + b \qquad (3)$$

En consecuencia, como toda ecuación (1) se puede transformar en (3), y toda ecuación (3) representa una recta con ordenada en el origen igual a (b) y pendiente (m), resulta que existe una correspondencia biunívoca entre ecuación de primer grado con dos incógnitas y línea recta.

Ejercicio

Representar la recta de ecuación:

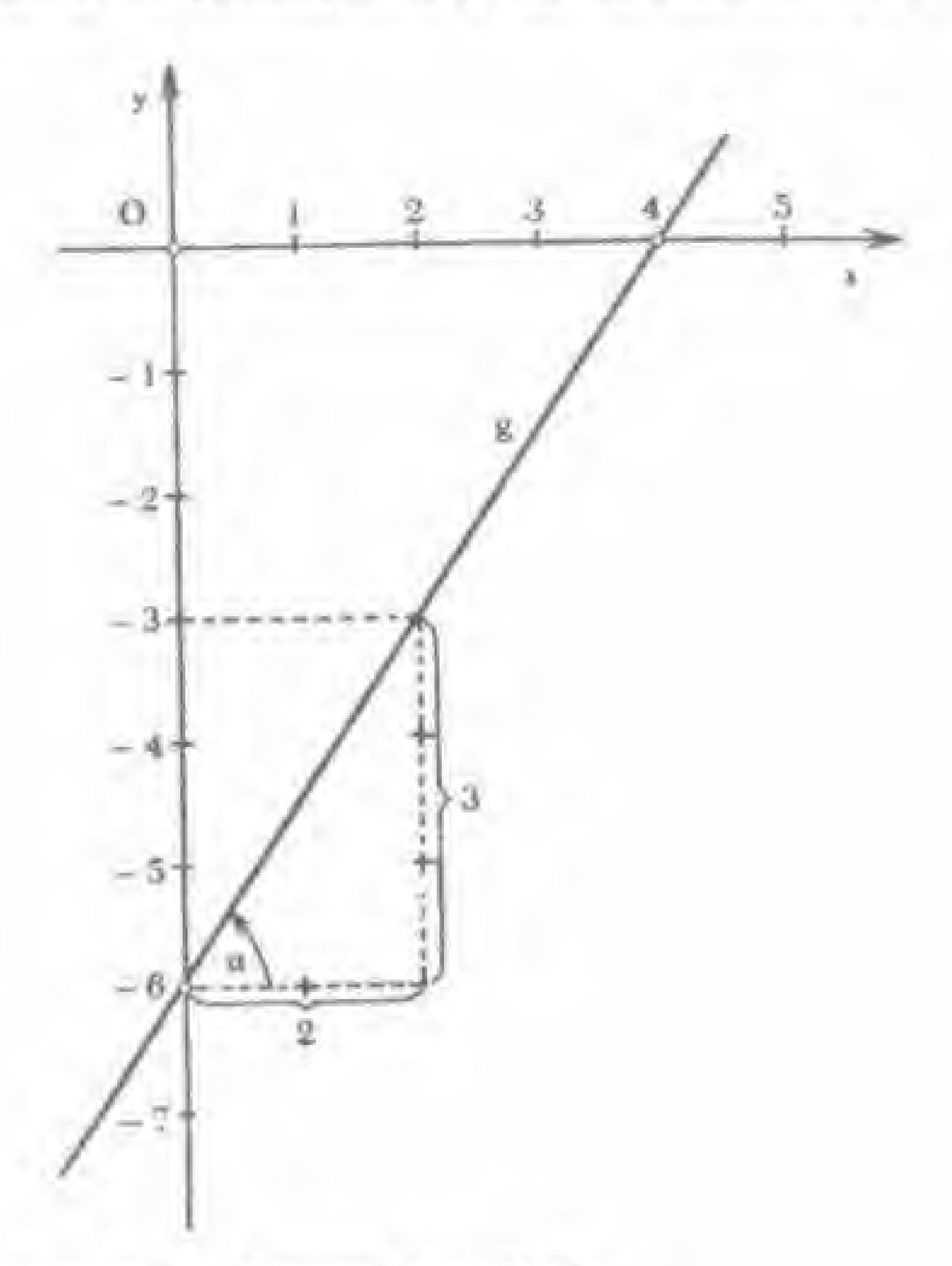
$$3 x - 2 y - 12 = 0$$

Dato $\left\{ 3 x - 2 y - 12 = 0 \right.$ Incógnitas $\left\{ \begin{array}{l} m = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{2} = -\dfrac{A}{B} \\ b = -6 = -\dfrac{C}{B} \end{array} \right.$

(ordenada al origen)

Solución

Para calcularse la pendiente y la ordenada al origen debe lle-



varse la ecuación a la forma *explícita:*

$$3 x - 2 y - 12 = 0$$
$$2 y = 3 x - 12$$
$$y = \frac{3}{2} x - 6$$

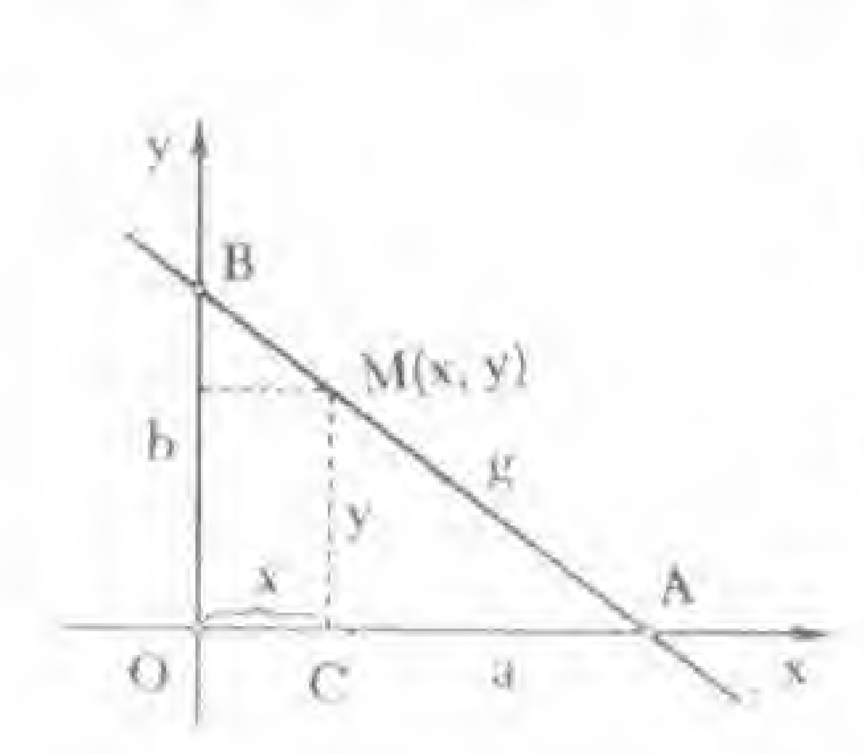
Ecuación Segmentaria o Canónica de la Recta

Interesa conocer la forma de ecuación en la que aparecen la abscisa (a) y la ordenada (b) de los puntos de intersección de la recta (g) con los ejes de coordenadas.

Datos $\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = a \\ \overline{OB} = b \end{array} \right.$

Se determina un punto genérico M de la recta (g).

Considerando los triángulos rectángulos semejantes MCA y BOA de ángulo común A, se tiene



$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$$

luego

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

y en fin

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

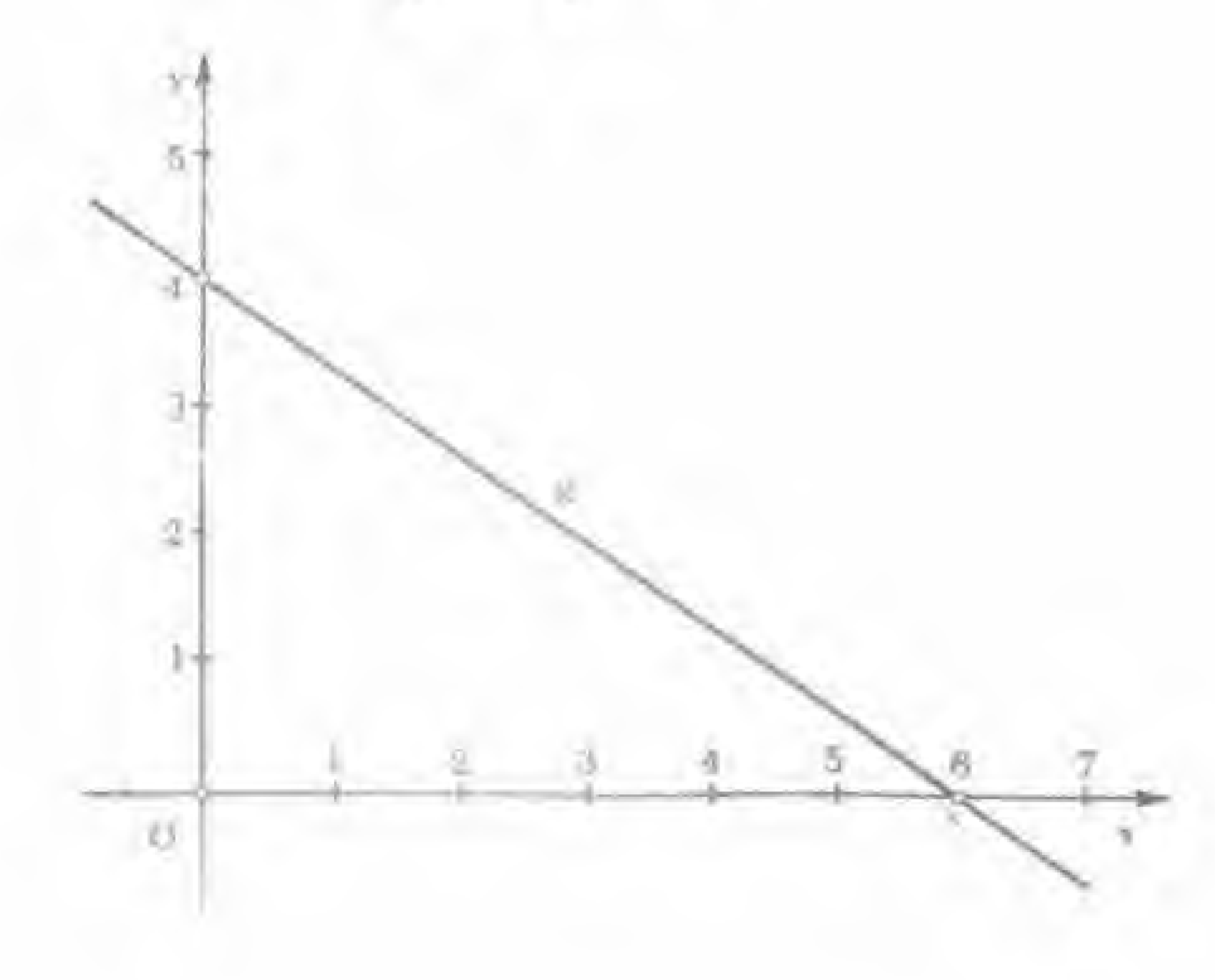
que expresa la ecuación de la recta en su forma *segmentaria.*

Dado que en este tipo de fórmula aparecen únicamente los segmentos a y b, se puede dibujar la recta directamente sin necesidad de cálculos.

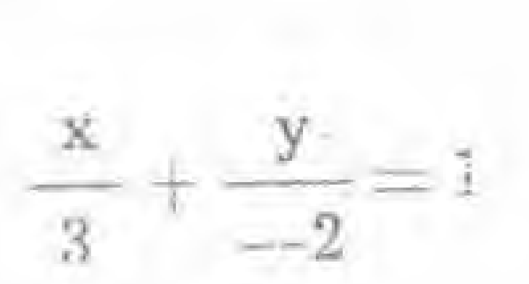
Ejemplos:

I) *Representar la recta de ecuación:*

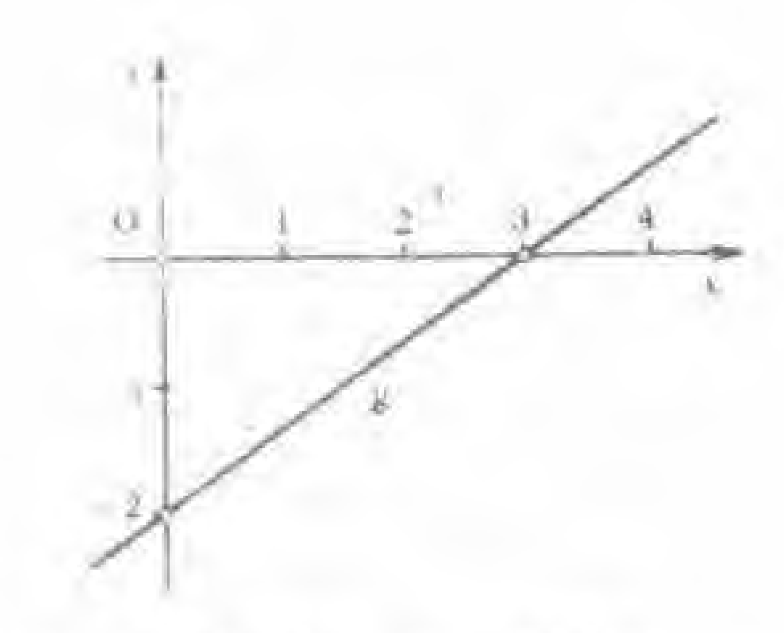
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$



II) *Graficar:*



$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$



III) *Expresar en su forma segmentaria la ecuación*

$$3x - 2y = 12$$

Dividiendo por 12, resulta

$$\frac{3}{12}x - \frac{2}{12}y = 1$$

o sea

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1$$

y en fin

$$\boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1}$$

Síntesis

Vamos a expresar las diversas formas de la ecuación de la recta.

1) $Ax + By + C = 0$ (Ecuación general implícita).

2) $y = mx + b$ (Ecuación general explícita).

3) $\frac{x}{h} + \frac{y}{p} = 1$ (Ecuación segmentaria).

Ecuación de las rectas que pasan por un punto

Se puede determinar la ecuacion general que representa al haz de rectas que pasan por un punto M (x_1, y_1).

En efecto, si la recta

$$y = m\,x + b$$

pasa por (x_1, y_1) se verificará

$$y_1 = m\,x_1 + b$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$y - y_1 = m\,x + b - m\,x_1 - b$$

reduciendo términos y sacando (m) como factor común, resulta

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)} \qquad (1)$$

Esta expresión define indudablemente, en general, a todas las rectas que pasan por (x_1, y_1); luego, es una ecuación que representa a dicho haz.

Pendiente de la recta. — De la fórmula (1) se obtiene un valor de

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad (2)$$

Es decir, se amplía el concepto de *pendiente,* por cuanto es igual a la *diferencia de ordenadas dividida por la diferencia de abscisas.*

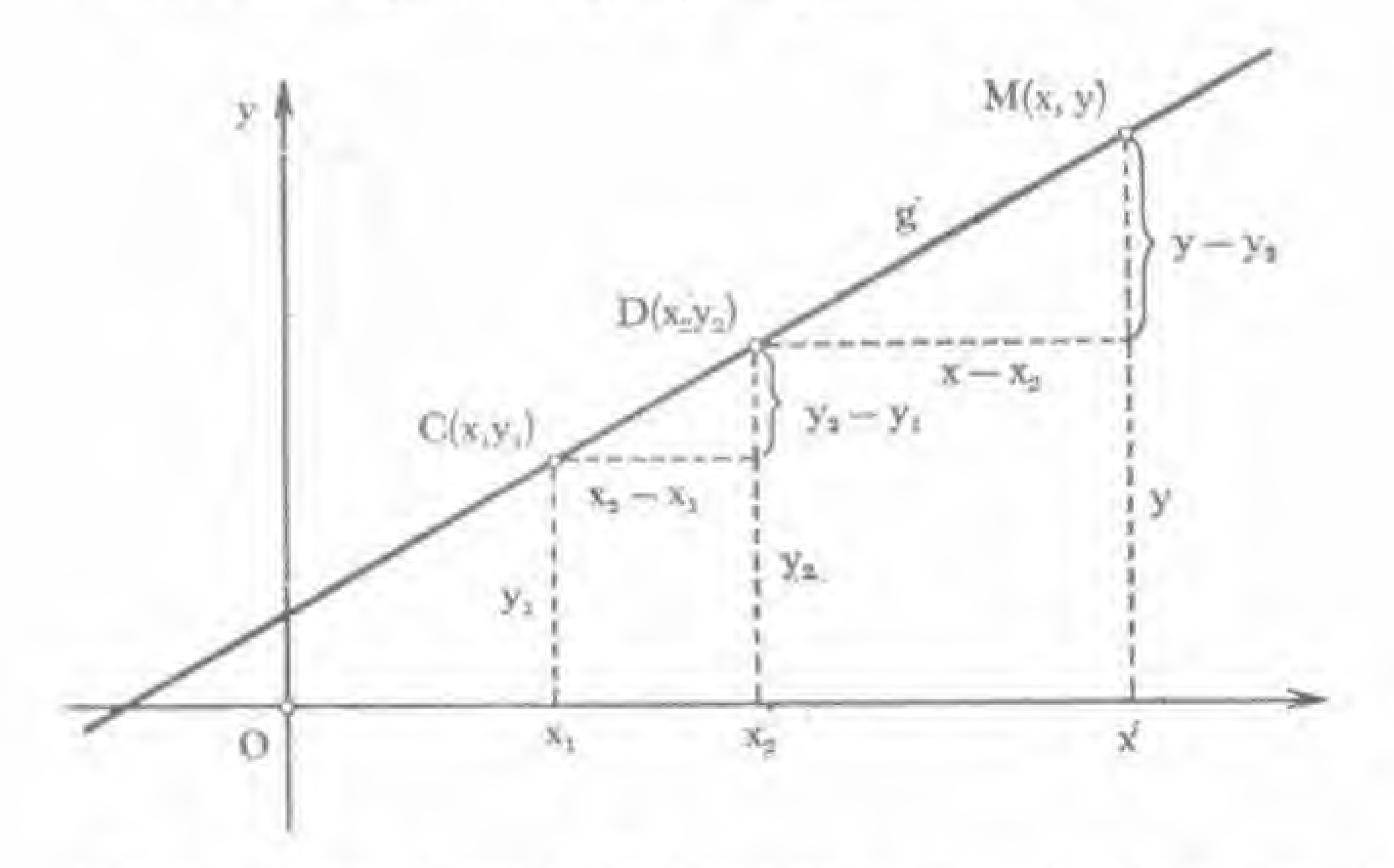
Si la recta pasa por el origen, siendo el punto (x_1, y_1) el (0, 0), el valor de la pendiente

$$m = \frac{y}{x}$$

coincide con el de la tangente del ángulo α. O sea, el valor de (m) no es más que un *caso particular* de la fórmula (2).

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Sean C y D puntos fijos y M punto móvil



Si se conoce el punto D (x_2, y_2) perteneciente a una de las rectas que pasan por (x_1, y_1) se tiene inmediatamente definida la recta que pasa por los dos puntos dados, cuya pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

luego, la ecuación de esta recta, que pasa por los dos puntos será, reemplazando en (1) del artículo anterior el valor de (m),

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

y cambiando los signos de numerador y denominador, para mejor ordenación, resulta

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

que es la ecuación pedida.

Condición para que tres puntos estén alineados

Tres puntos estarán alineados si pertenecen a la misma recta.

Si el punto (x_3, y_3) pertenece a la recta, se ha de verificar la ecuación del artículo anterior, o sea, cambiando el signo para mejor ordenación y reemplazando x e y por x_3 e y_3:

$$y_1 - y_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_3)$$

Es decir, si los tres puntos cumplen esta condición, pertenecen a la misma recta.

Ángulo formado por dos rectas

Sean dos rectas g_1 y g_2 de ecuaciones

$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$

Las rectas (g_1) y (g_2) forman con el eje de las abscisas los ángulos α_1 y α_2, respectivamente.

El ángulo positivo (φ) determinado por (g_1) y (g_2) es

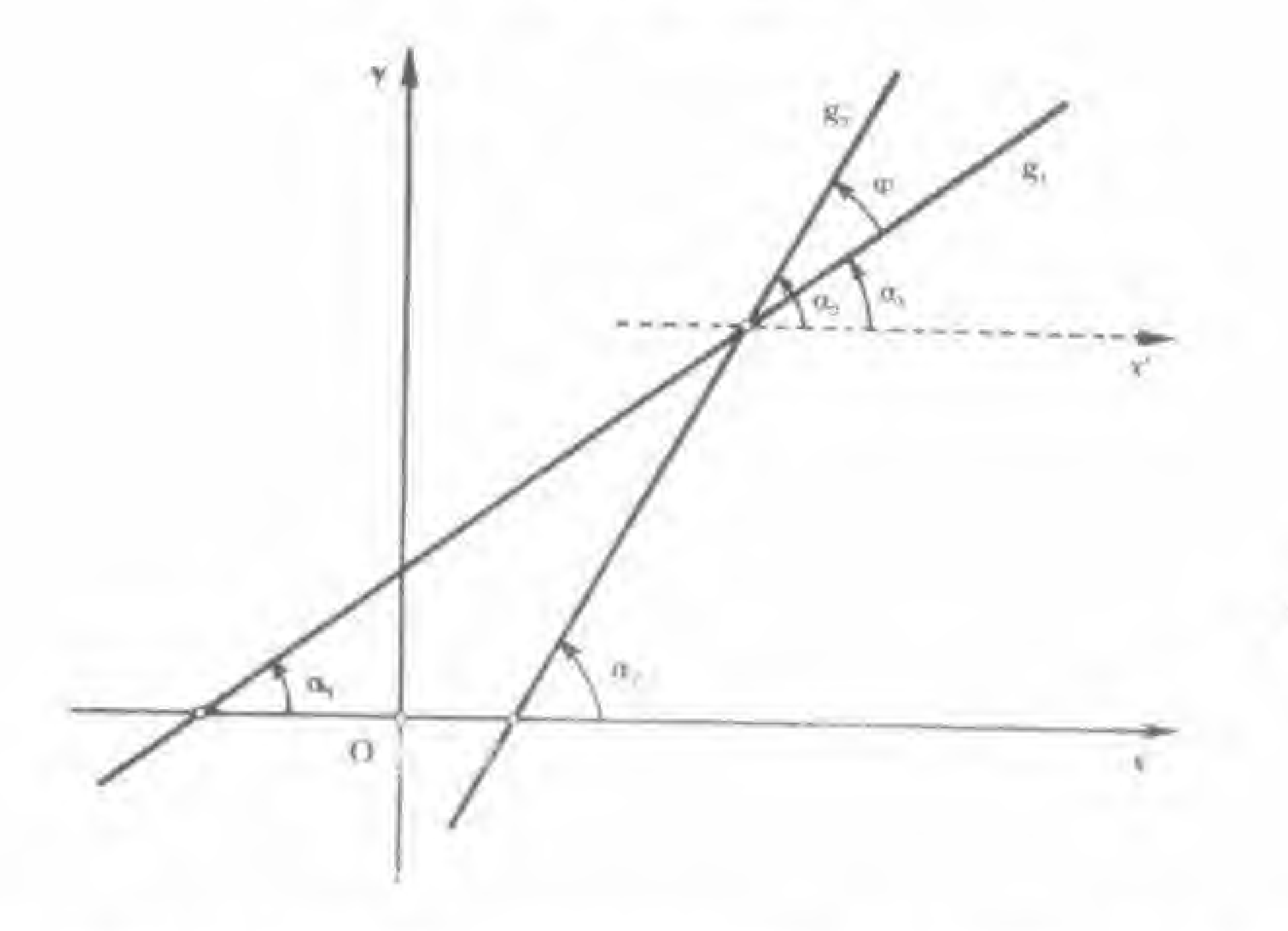
$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

Luego

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

aplicando la fórmula trigonométrica de la tangente de una diferencia de ángulos, se tiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \,.\, \operatorname{tg} \alpha_2}$$



pero como la tangente trigonométrica del ángulo de dirección de la recta con respecto al eje de abscisas es igual al coeficiente angular de la ecuación de una recta, resulta

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \qquad\qquad m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$$

de donde sustituyendo, resulta

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \,.\, m_1}$$

fórmula que permite calcular el valor de (φ), pues da

$$\varphi = \text{áng. tg}\, \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \,.\, m_2}$$

Ejercicios

I) *Calcular el ángulo formado por las rectas:*

$$y = \frac{1}{2} x + 3$$

$$y = 3x - 2$$

Como

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

reemplazando por sus valores

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

luego

$$\boxed{\varphi = 45^\circ}$$

II) *Calcular el ángulo determinado por las rectas:*

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{3}{2} x - \frac{1}{2}$$

Aplicando la fórmula correspondiente, se tiene:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{13}{6}}{1 - 1} = \frac{-\frac{13}{6}}{0} = \infty$$

luego

$$\boxed{\varphi = 90^\circ} \quad \text{(Rectas perpendiculares)}$$

III) *Calcular el ángulo determinado por las rectas:*

$$y = 5x + 2$$
$$y = 5x - 3$$

Aplicando la fórmula, resulta

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5 - 5}{1 + 5 \cdot 5} = \frac{0}{26} = 0$$

o sea

$$\boxed{\varphi = 0^\circ} \quad \text{(Rectas paralelas)}$$

Rectas perpendiculares. — Observando el ejemplo (II) y otros análogos se establece que cuando

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

las rectas son *perpendiculares*.

Es decir, *dos rectas son perpendiculares cuando la pendiente de una es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo cambiado.*

Ejemplos:

$$\text{a)} \begin{cases} y = \frac{4}{5} x - 1 \\ y = -\frac{5}{4} x + 6 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Rectas paralelas. — Observando el ejemplo (III) y otros análogos se establece que si

$$m_1 = m_2$$

las rectas son *paralelas*.

O sea, *dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.*

Ejemplos:

$$\text{a)} \begin{cases} y = 5x - \frac{1}{2} \\ y = 5x + \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y = \frac{x}{2} - 1 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Rectas coincidentes. — Si las ecuaciones son dadas en la forma general

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

la condición de paralelismo será

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

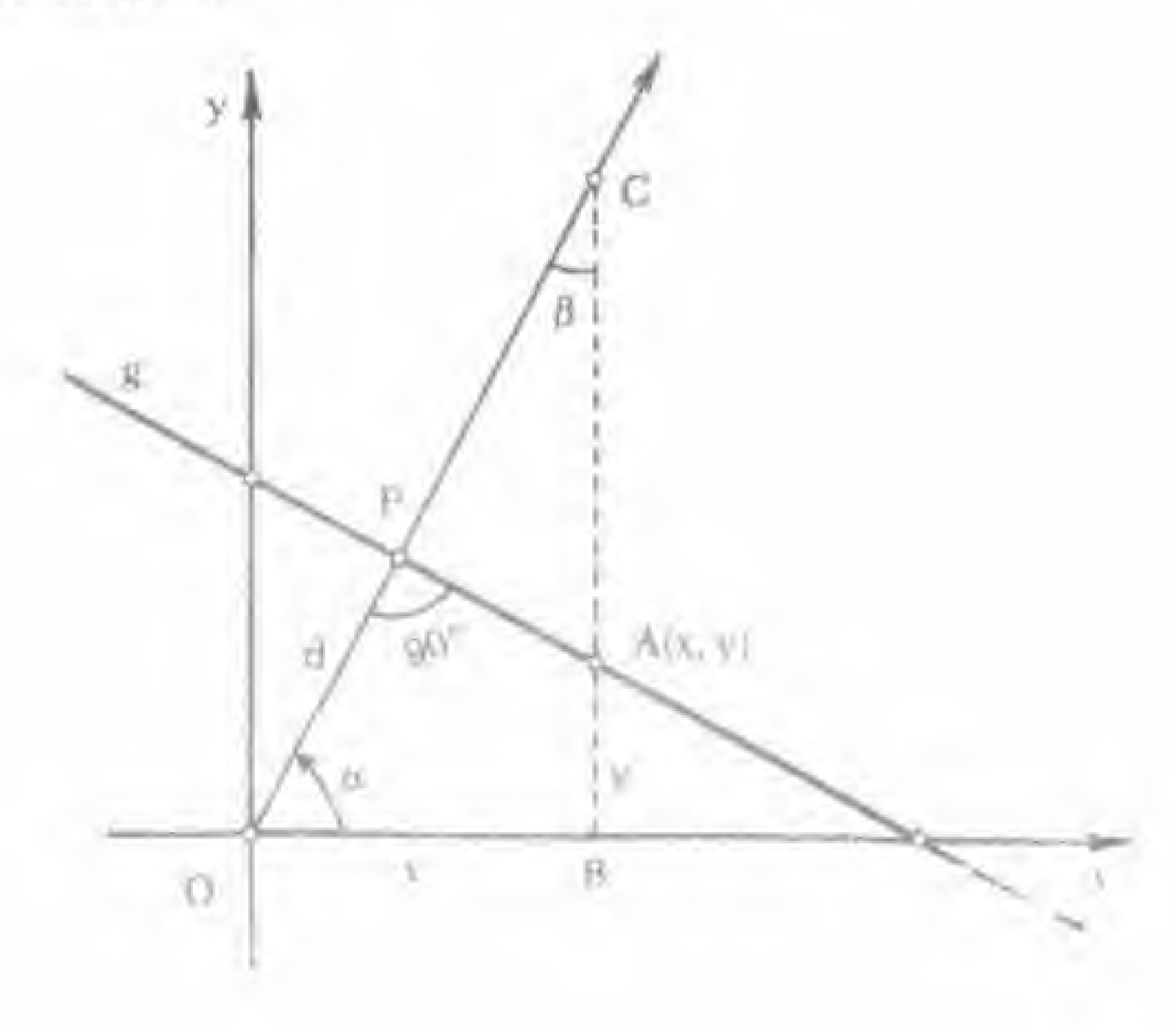
Cuando se tiene

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

las rectas son *coincidentes*, es decir, las ecuaciones dadas representan la misma recta.

Ecuación normal de la recta

Sea (g) la recta y el segmento $\overline{OP}$ la *normal* trazada desde el origen.



La recta (g) queda determinado si conocemos, en valor y signo, el parámetro $\overline{OP}$ y el ángulo α que la normal forma con el eje de abscisa.

Eligiendo un punto A (x, y) de la recta dada y trazando la perpendicular $\overline{AB}$ al eje x, resulta la poligonal OBAP de resultante $\overline{OP} = d$. Proyectándola sobre la recta normal OP, se tiene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + \overline{AP} \cos 90° = d$$

o bien, por ser $\cos 90° = 0$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = d$$

y, en fin, por ser α y β complementarios

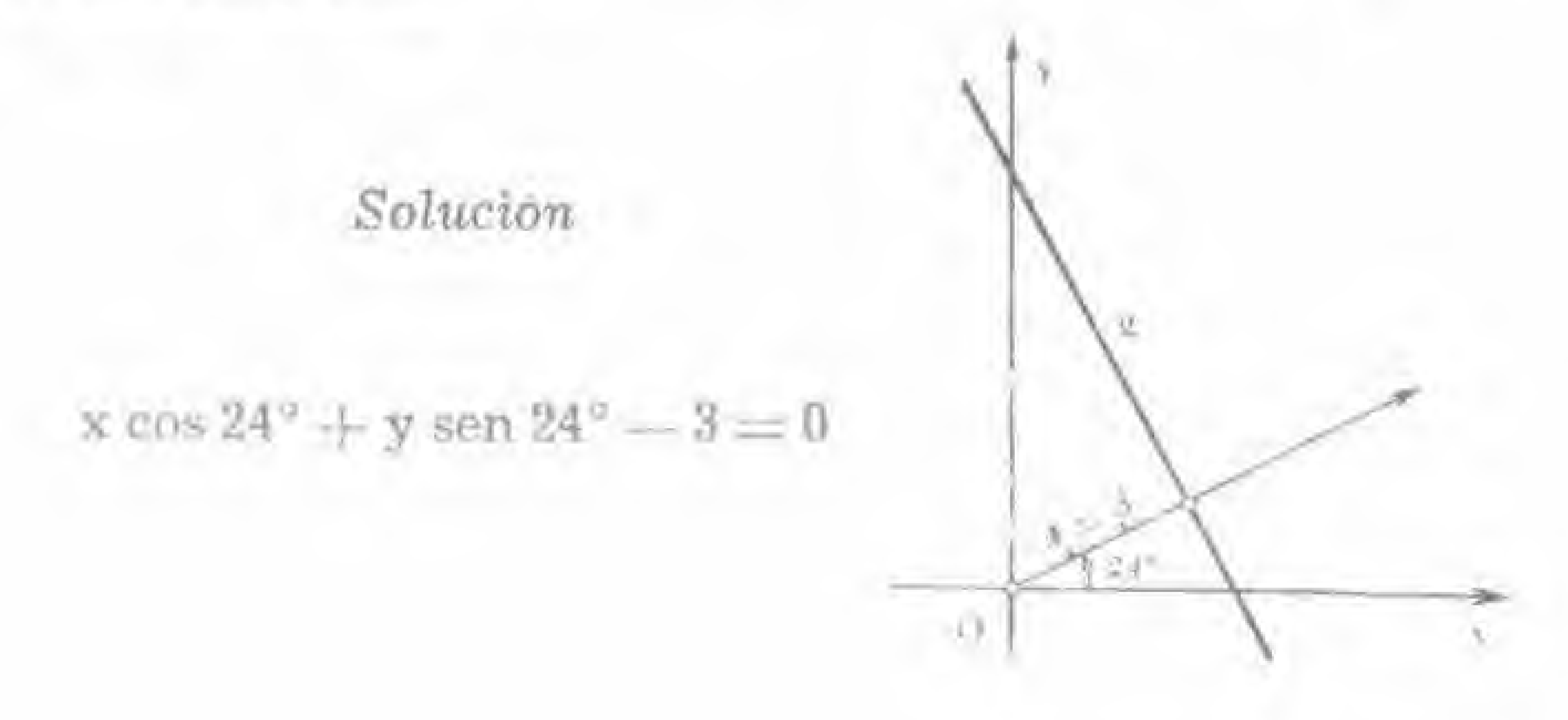
$$\boxed{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - d = 0}$$

que es la *ecuación normal* de la recta.

Ejemplo. — *Determinar la ecuación normal de la recta (g) del diagrama.*

Solución

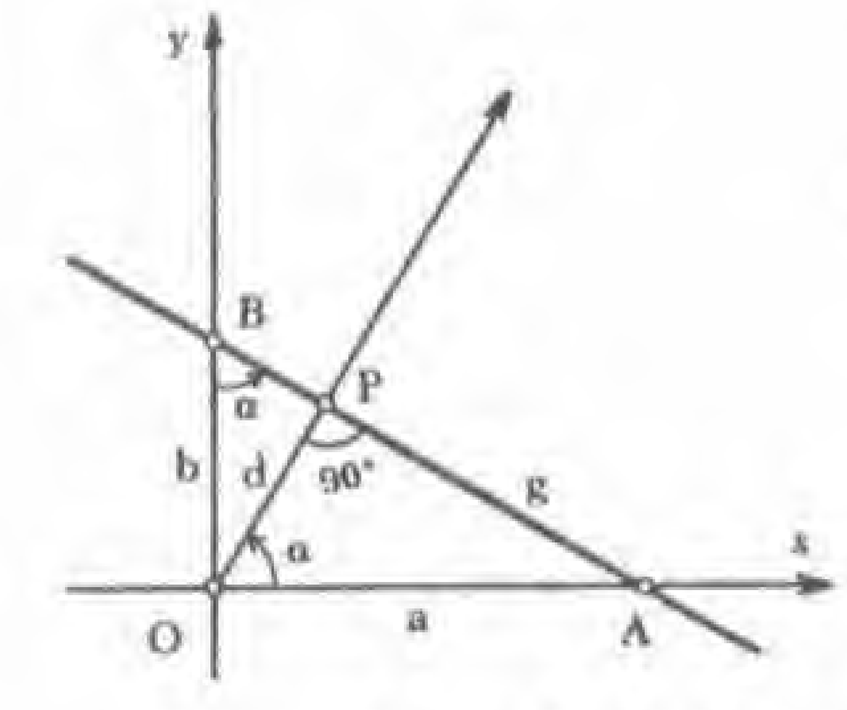
$$x \cos 24° + y \operatorname{sen} 24° - 3 = 0$$



Determinación de la ecuación normal de la recta, partiendo de la forma segmentaria.

Sea

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1)$$



$$\cos\alpha=\frac{d}{a} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{d}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{d}{b} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{d}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Reemplazando estos valores en (1), resulta

$$\frac{x}{\dfrac{d}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\dfrac{d}{\operatorname{sen}\alpha}}=1$$

o bien

$$\frac{x\cos\alpha}{d}+\frac{y\operatorname{sen}\alpha}{d}=1$$

Eliminando denominadores y transportando al primer miembro, se tiene

$$\boxed{x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-d=0}$$

que es la ecuación normal.

Obtención de la ecuación normal de la recta, partiendo de la forma general.

$Ax+By+C=0$ representa la ecuación general.

$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-d=0$ expresa la ecuación normal.

Para que estas ecuaciones representen *la misma recta*, los coeficientes correspondientes deben ser *proporcionales*.

Es decir

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}=\frac{-d}{C}=\gamma \quad (\text{n}^{\text{o}} \text{ constante})$$

por lo tanto,

$$\cos\alpha=A\,.\,\gamma \qquad (1)$$
$$\operatorname{sen}\alpha=B\,.\,\gamma \qquad (2)$$
$$-d=C\,.\,\gamma \qquad (3)$$

Para determinar el valor de (γ), vamos a elevar al cuadrado las expresiones (1) y (2):

$$\cos^2\alpha=A^2\gamma^2$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha=B^2\gamma^2$$

Sumando y sacando (γ^2) factor común

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=\gamma^2\,[A^2+B^2]$$

pero el primer miembro es igual a la unidad; en consecuencia,

$$\gamma^2=\frac{1}{A^2+B^2}$$

o sea

$$\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Reemplazando este valor en (1), (2) y (3), se obtiene

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$-d=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Substituyendo estos valores en la ecuación normal primitiva, resulta

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

o bien

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

El doble signo del radical. — Como (d) es positivo, (− d) será negativo y el doble signo del radical deberá tomarse de modo que esto ocurra, para lo que se necesita *que sea contrario al signo de* (C).

Ejemplo

Determinar la forma normal de la recta de ecuación general:

$$6x+8y-2=0$$

Solución

La ecuación normal correspondiente será:

$$\frac{6}{\pm\sqrt{6^2+8^2}}\,x+\frac{8}{\pm\sqrt{6^2+8^2}}\,y+\frac{-2}{\pm\sqrt{6^2+8^2}}=0$$

operando, resulta

$$\frac{6}{\pm 10}\,x+\frac{8}{\pm 10}\,y-\frac{2}{\pm 10}=0$$

o sea

$$\frac{3}{\pm 5}\,x+\frac{4}{\pm 5}\,y-\frac{1}{\pm 5}=0$$

Para que la distancia (d) resulte positiva es menester elegir el signo más del denominador, es decir:

$$\frac{3}{5}\,x+\frac{4}{5}\,y-0{,}2=0$$

Pero

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=53^\circ10'$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=53^\circ10'$$

luego la *ecuación normal* pedida es

$$x\cos 53^\circ10'+y\operatorname{sen}53^\circ10'-0{,}2=0$$

Determinación de la ecuación normal conociendo la forma explícita de la recta.

La ecuación explícita es

$$y=mx+b$$

Transportando todos sus términos a un miembro, resulta la ecuación general de la recta

$$y-mx-b=0$$

por lo tanto, la *ecuación normal* pedida será:

$$\frac{y-mx-b}{\pm\sqrt{1+m^2}}=0$$

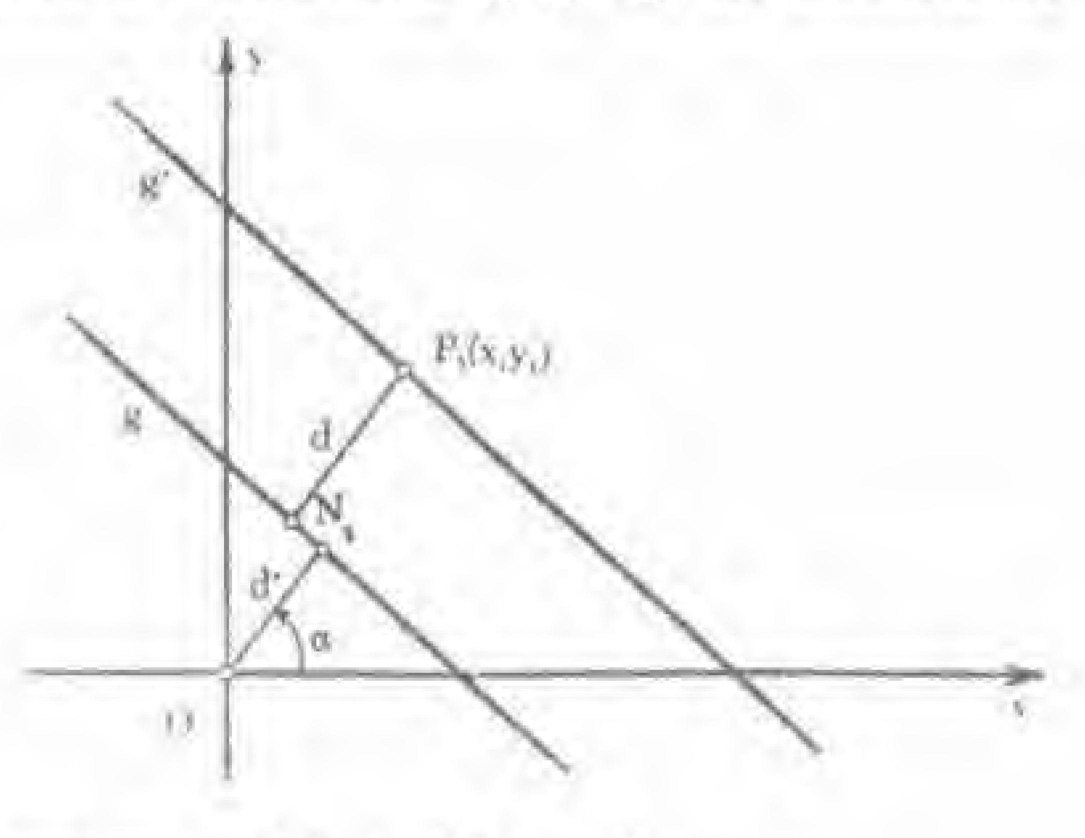
Distancia de un punto a una recta

Supongamos una recta (g) definida por su ecuación normal

$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-d'=0$$

y un punto $P_1\equiv(x_1\,y_1)$.

Si trazamos por el punto P_1 la recta $g' /\!/ g$, la distancia del punto de referencia a la recta (g) puede ser apreciada en magnitud y en signo por el segmento orientado $N_1P_1=d$. La ecuación de la recta (g') que pasa por P_1 y es *paralela* a (g) es



$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-(d+d')=0$$

Además, como P_1 es punto de esta paralela, se cumple que

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha - (d + d') = 0$$

de donde se infiere fácilmente que la distancia será:

$$\boxed{d = x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha - d'}$$

Signo de la distancia. — La distancia (d) resulta *positiva* si el punto P_1 y origen (O) del sistema se encuentran en semiplanos opuestos con respecto a la recta dada y *negativa* en caso contrario.

Ejemplo

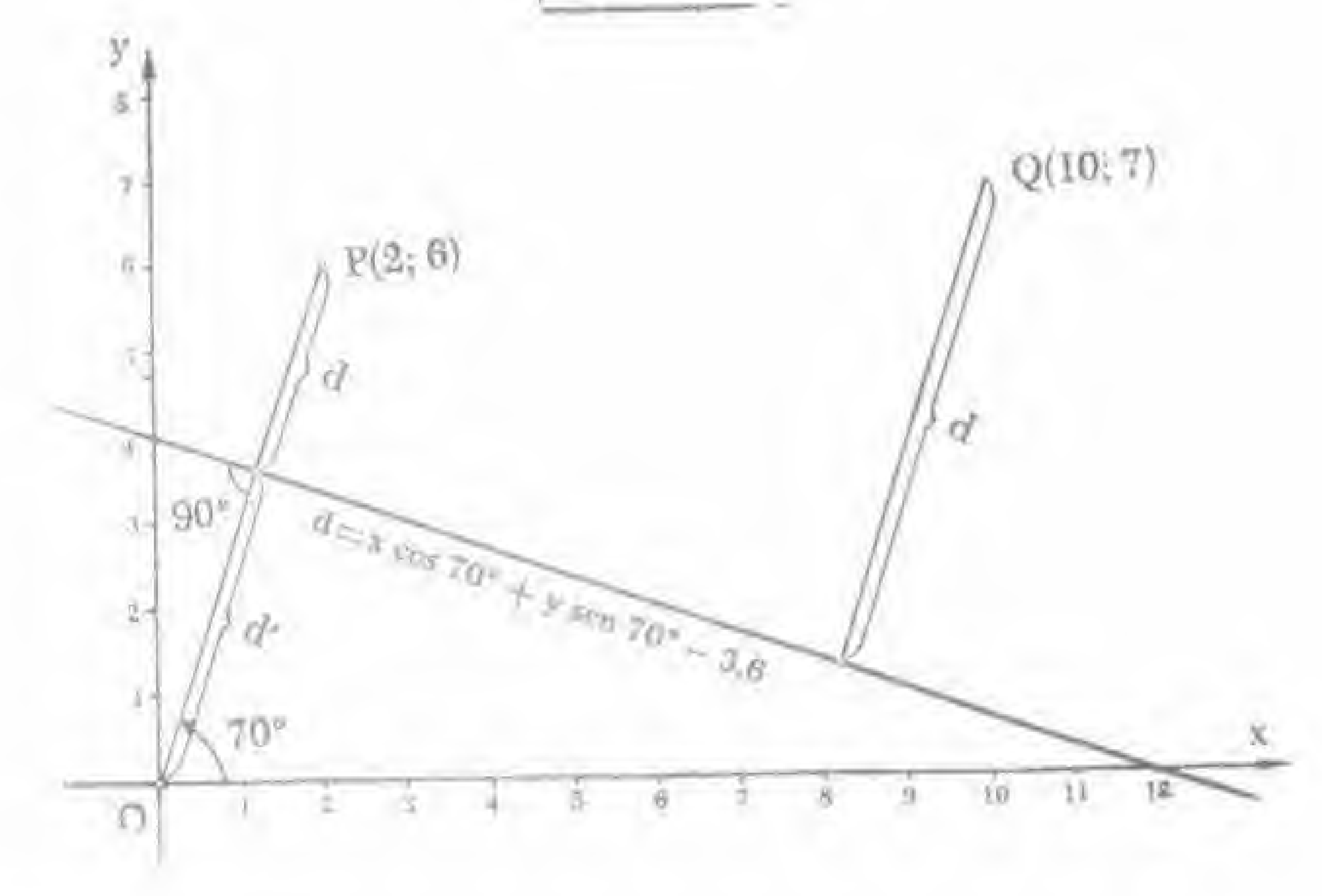
Calcular la distancia a la recta de ecuación:

$$d = x \cos 70° + y \operatorname{sen} 70° - 3{,}6$$

I) Para P (2,6)

$$d = 2 \times 0{,}34 + 6 \times 0{,}94 - 3{,}6$$
$$d = 0{,}68 + 5{,}64 - 3{,}6$$

$$\boxed{d = 2{,}72}$$



II) Para Q (10 ; 7)

$$d = 10 \cos 70° + 7 \operatorname{sen} 70° - 3{,}6$$
$$d = 10 \times 0{,}34 + 7 \times 0{,}94 - 3{,}6$$

$$\boxed{d = 6{,}38}$$

Observación. — Si la ecuación de la recta es

$$A x + B y + C = 0$$

para hallar la distancia de un punto $P_1 (x_1 y_1)$ basta escribir la ecuación en su forma *normal* y reemplazar las variables por las coordenadas del punto dado.

O sea

$$\boxed{d = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Al calcular la distancia prescindimos de la relativa posición de punto y recta; por lo tanto, se escoge siempre el signo positivo en el resultado obtenido.

EJERCICIOS

1) *Representar gráficamente la recta de ecuación:*

a) $y = \frac{5}{4} x + 8$

b) $y = -3x - 1$

c) $y = 0{,}5 x + \frac{1}{2}$

d) $y = x + 6$

2) *Representar la recta de ecuación:*

a) $3x + 6y + 10 = 0$
b) $x - 5y - 1 = 0$
c) $8x + 2y + 1 = 0$
d) $x + y - 6 = 0$

3) *Representar la recta de ecuación:*

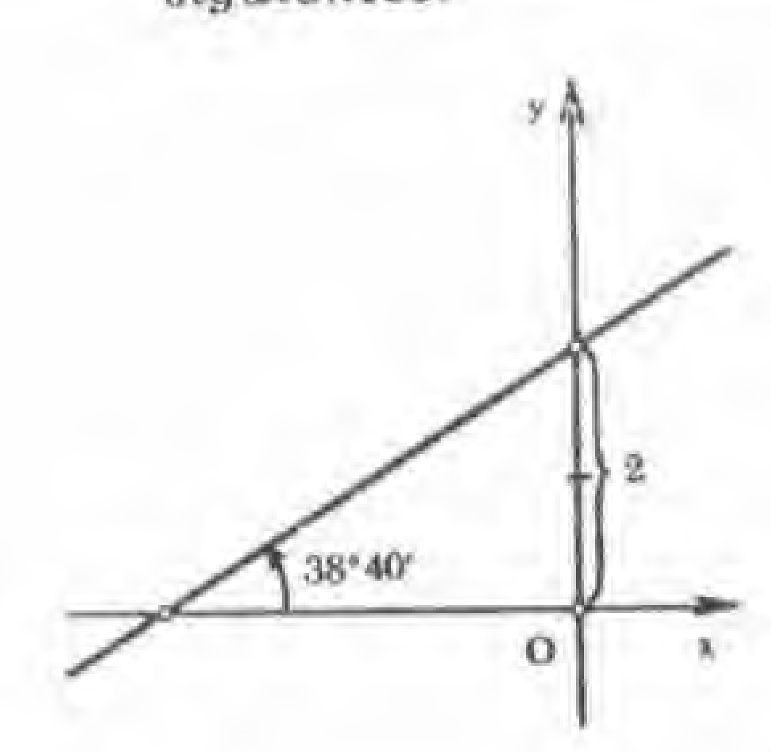
a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

b) $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$

c) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$

d) $x + \frac{y}{-4} = 1$

4) *Determinar la ecuación explícita de cada una de las rectas siguientes:*



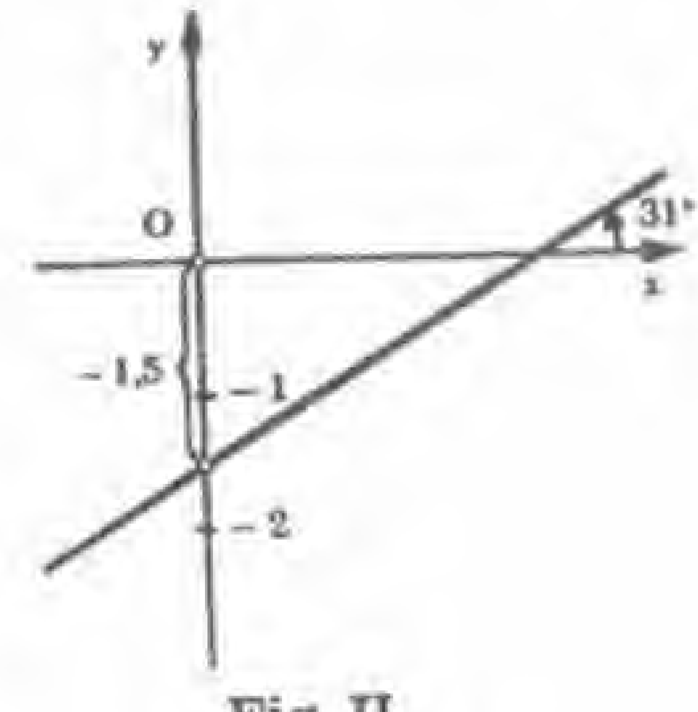


Fig. II

R.: fig. (I) $y = 0{,}8\,x + 2$
R.: fig. (II) $y = 0{,}6\,x - 1{,}5$

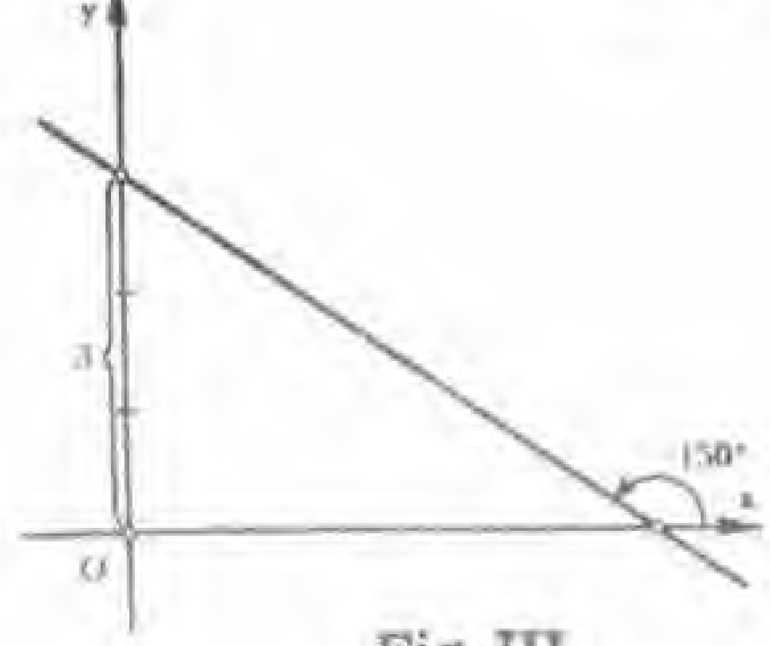


Fig. III

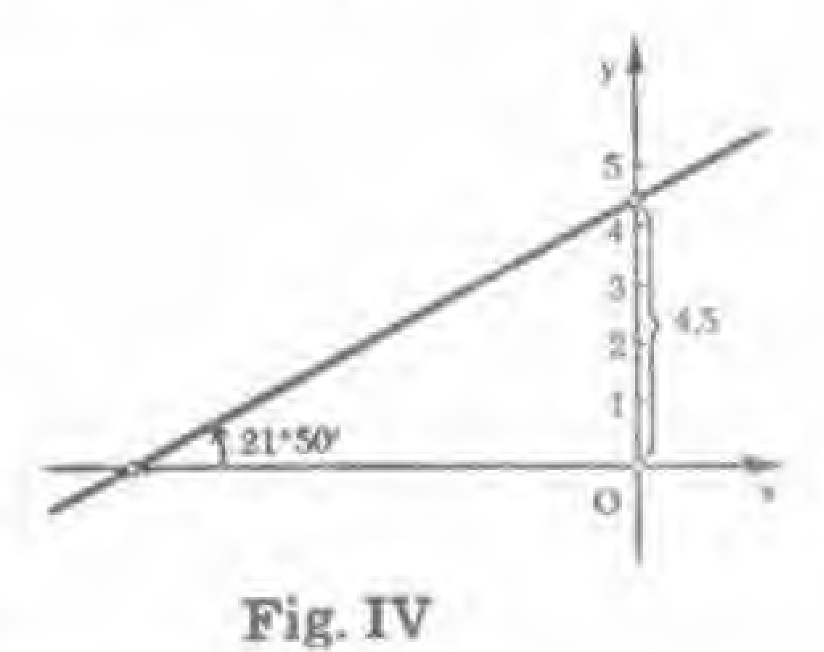


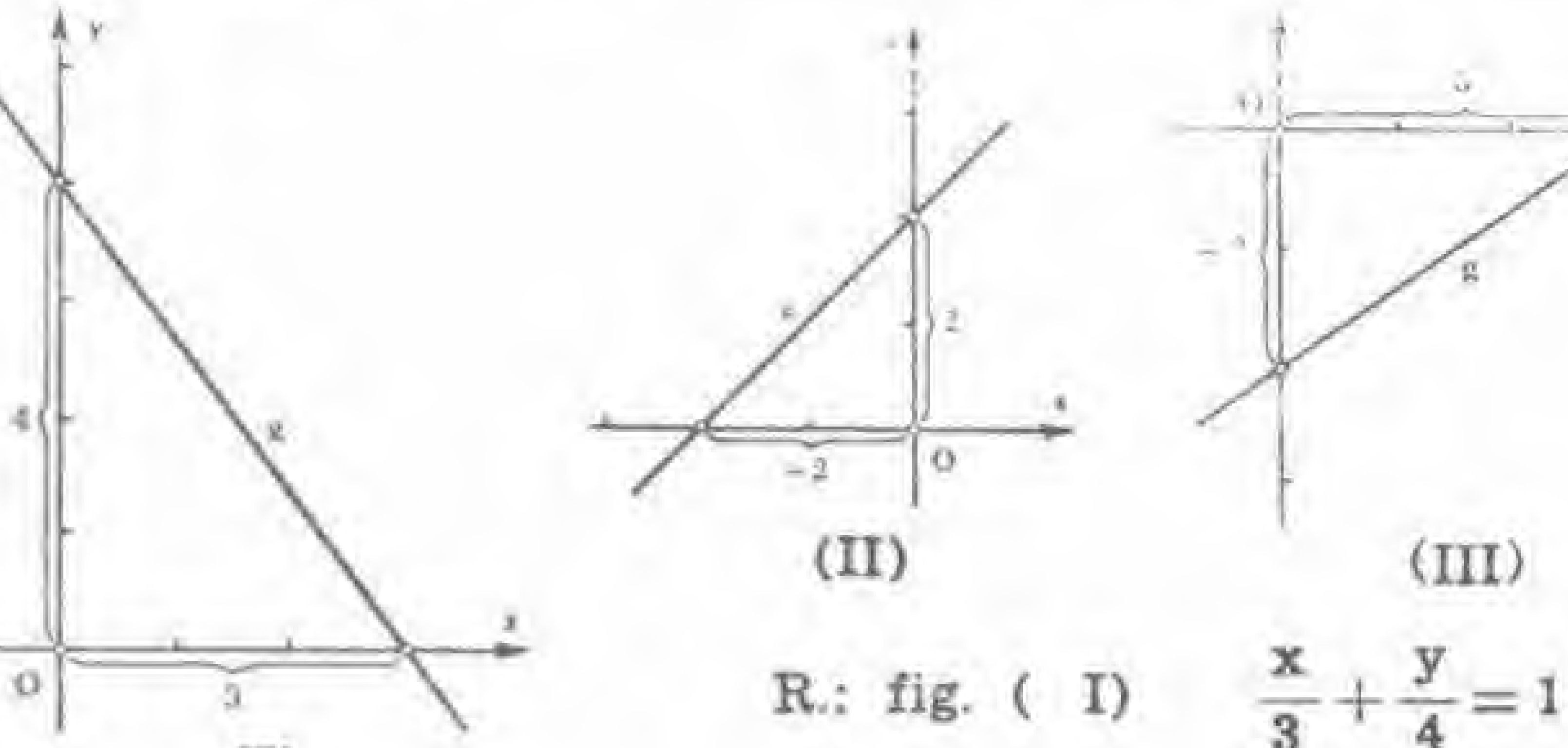
Fig. IV

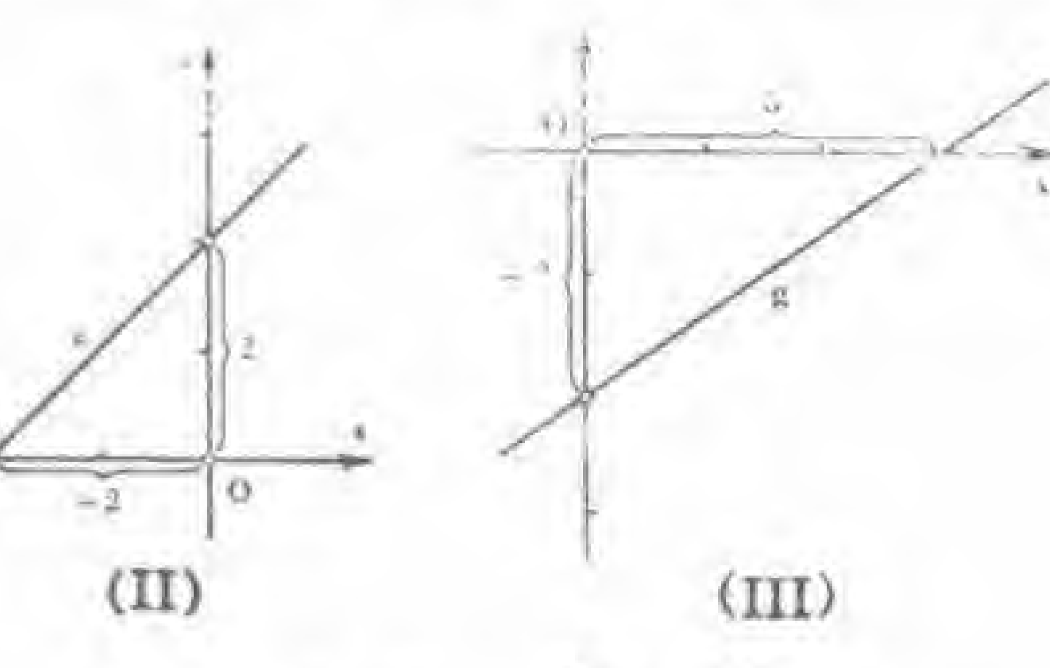
R.: fig. (III) $y = -0{,}58\,x + 3$
R.: fig. (IV) $y = 0{,}4\,x + 4{,}5$

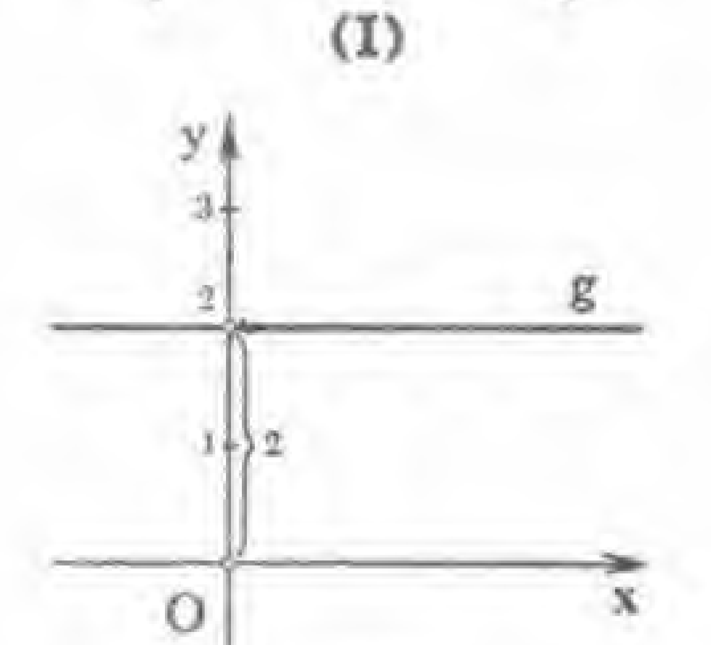
5) *Determinar la ecuación general de cada una de las rectas del ejercicio anterior:*

R.: (I) $0{,}8\,x - y + 2 = 0$
R.: (II) $0{,}6\,x - y - 1{,}5 = 0$
R.: (III) $0{,}58\,x + y - 3 = 0$
R.: (IV) $0{,}4\,x - y + 4{,}5 = 0$

6) *Dar la ecuación segmentaria de cada una de las rectas graficadas:*







R.: fig. (I) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

R.: fig. (II) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

R.: fig. (III) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

R.: fig. (IV) $\begin{cases} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$

7) *Determinar la pendiente de cada una de las rectas representadas gráficamente en el ejercicio anterior:*

R.: fig. (I) $m = -\frac{4}{3}$

R.: fig. (II) $m = 1$

R.: fig. (III) $m = \frac{2}{3}$

R.: fig. (IV) $m = 0$

8) *Calcular el ángulo de cada una de las rectas de ecuación:*

a) $5x + 2y - 3 = 0$ R.: $\alpha = 111°40'$

b) $4x - 5y = -5$ R.: $\alpha = 38°40'$

c) $2x + 2y + 2 = 0$ R.: $\begin{cases} \alpha = -45° \\ \alpha = 315° \end{cases}$ 135°.

d) $x - 2y - 5 = 0$ R.: $\alpha = 26°30'$

9) *Transformar en ecuación segmentaria:*

a) $x - 5y + 8 = 0$ R.: $\frac{-x}{8} + \frac{y}{1,6} = 1$

b) $\frac{x}{10} + y - 1 = 0$ R.: $\frac{x}{10} + \frac{y}{1} = 1$

c) $y = 8x - 2$ R.: $\frac{x}{0,25} - \frac{y}{2} = 1$

d) $y = \frac{x}{2} + 5$ R.: $\frac{-x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

10) *Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,2) y (11,6):*

R.: $y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$

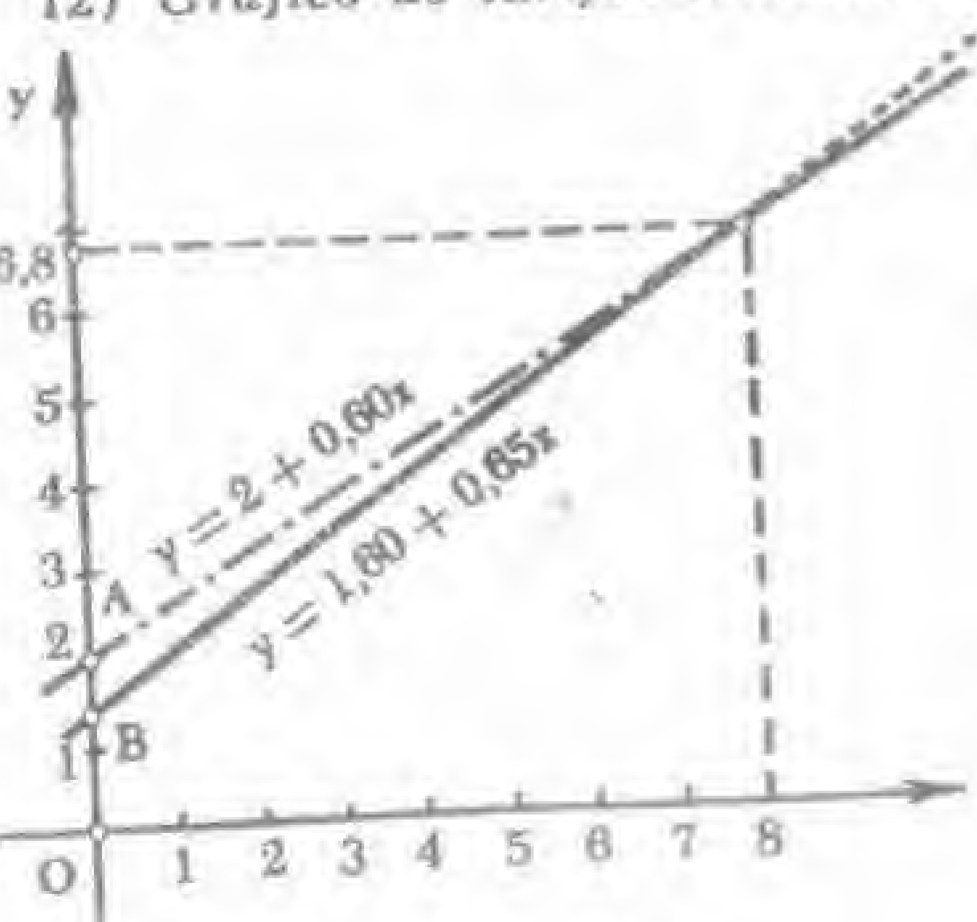
11) *Determinar analítica y gráficamente las coordenadas del punto de intersección de las rectas:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ y = 2x \end{cases}$$

R.: $x = \frac{12}{7}$

$y = \frac{24}{7}$

12) *Gráfico de tarifas lineales: Un ferrocarril A cobra 2 $ por derecho fijo y 0,60 $ por ton./km. Otro ferrocarril B cobra 1,60 $ por derecho fijo y 0,65 $ por ton./km. Se pide averiguar la zona más económica para cada ferrocarril.*



Incógnitas $\begin{cases} y = \text{tarifa} \\ x = \text{distancia} \end{cases}$

f. c. A : $y = 2 + 0,60\,x$
f. c. B : $y = 1,60 + 0,65\,x$

R.: $x = 8$
$y = 6,8$

Interpretación

Conviene f. c. (B) de O a 8
Conviene f. c. (A) de 8 en adelante

13) ***Transformar en ecuación normal:***

a) $0,5x + 0,87y - 4 = 0$
R.: $x \cos 60° + y \operatorname{sen} 60° - 4 = 0$

b) $\frac{x}{2} + \frac{87}{100} y - 5 = 0$
R.: $x \cos 60° + y \operatorname{sen} 60° - 5 = 0$

c) $\frac{19}{20} x + \frac{3}{10} y - 3 = 0$
R.: $x \cos 18° + y \operatorname{sen} 18° - 3 = 0$

d) $0,34x + 0,94y - 4 = 0$
R.: $x \cos 70° + y \operatorname{sen} 70° - 4 = 0$

14) ***Transformar en ecuación normal:***

a) $y = -\frac{9}{10} x$
R.: $x \cos 138° + y \operatorname{sen} 138° = 0$

b) $y = 0,5x + 0,4$
R.: $x \cos 26°40' + y \operatorname{sen} 26°40' - 4 = 0$

c) $y = \frac{5}{4} x - 1$
R.: $x \cos 51°20' + y \operatorname{sen} 51°20' - 1 = 0$

15) ***Calcular la distancia de cada uno de los puntos siguientes a la correspondiente recta:***

a) $(5, 1)\ ;\ 4x - 5y + 4 = 0$
R.: $d \cong 3$

b) $(4, -2)\ ;\ y = 8x - 2$
R.: $d = 3,45$

c) $(-8, 0)\ ;\ \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$
R.: $d = 11$

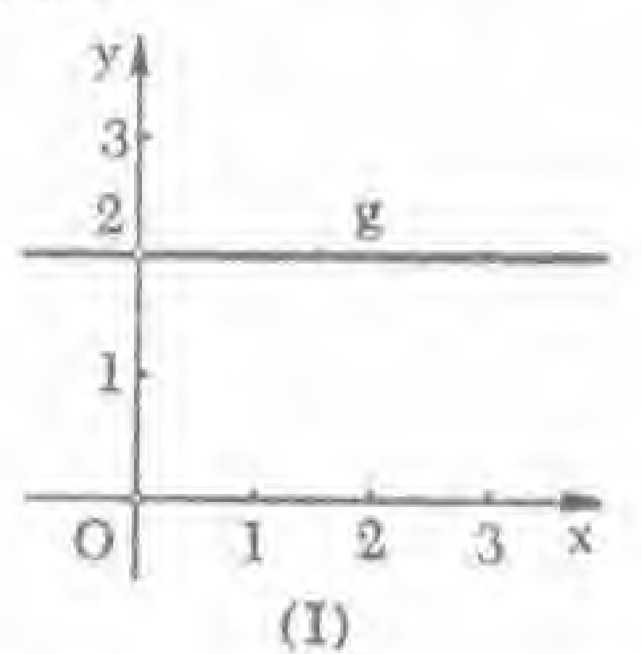
d) (1, 1) ; $5x + 12y - 13 = 0$

R.: $d = \frac{4}{13}$

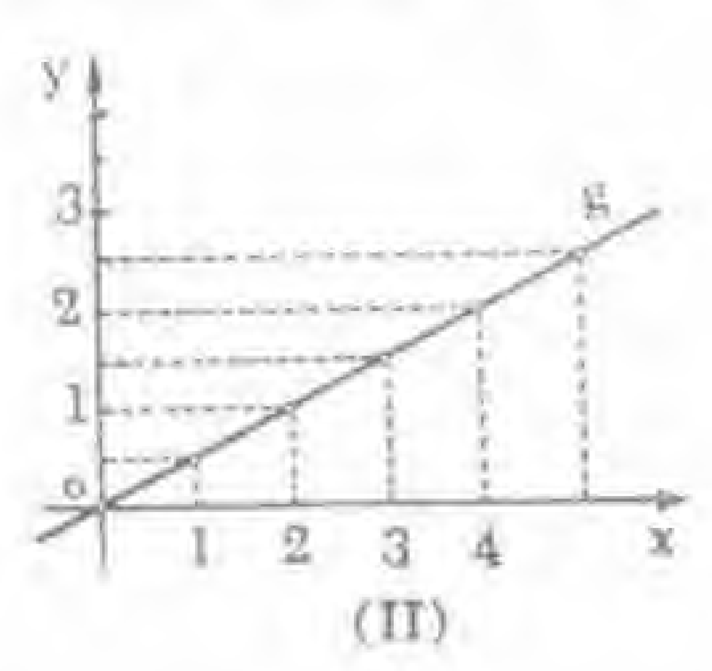
e) (2, 2) ; $4{,}5x + 6y - 15 = 0$

R.: $d = 0{,}8$

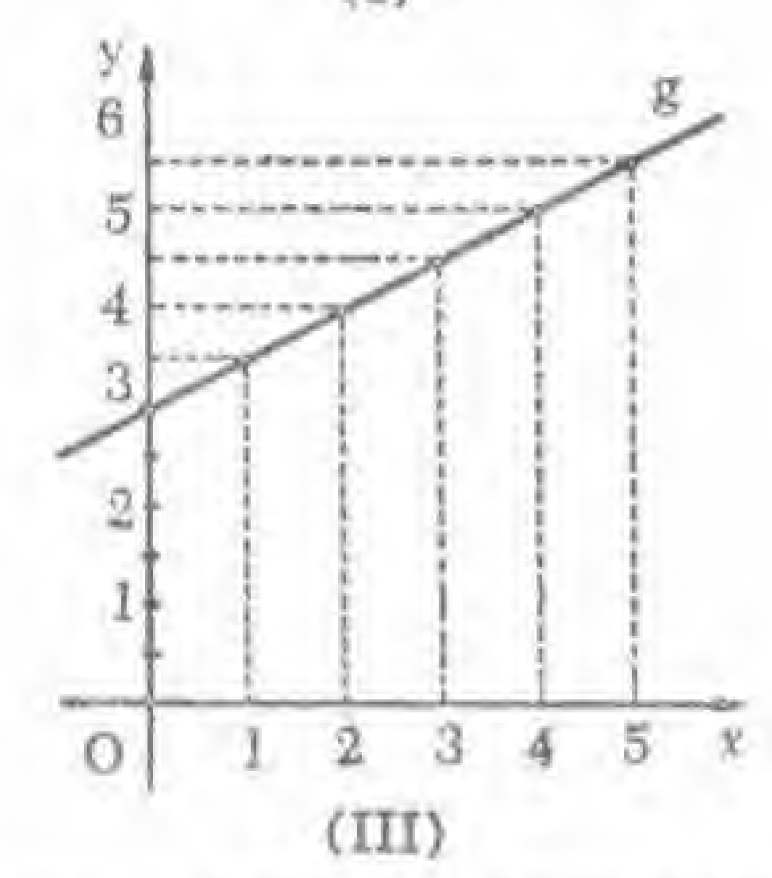
16) *Determinar la ecuación de la recta (g) de los gráficos siguientes:*



(I)



(II)



(III)

(I) R.: $y = 2$

(II) R.: $y = \frac{1}{2}x$

(III) R.: $y = \frac{1}{2}x + 3$

17) *Calcular el ángulo de dos rectas:*

a) $y = 3x - 2$
$y = -x + 1$

R.: $\varphi = 63° 30'$

b) $y = 4x - 2$
$y = 4x + 5$

R.: $\varphi = 0°$

c) $y = 3x + 2$
$y = -\frac{1}{3}x - 5$

R.: $\varphi = 90°$

18) *Hallar una paralela a la recta* $y = 4x + 6$ *que pase por el punto* P (5 ; 3).

R.: $y = 4x - 17$

19) *Determinar la ecuación de la recta que pase por los puntos siguientes:*

a) A (1 ; 4) y B (0, 0) R.: $y = 4x$

b) M (−2 ; 3) y P (−3 ; −1) R.: $y = 4x + 11$

20) *Calcular la longitud del segmento de perpendicular trazada del origen a la recta:*

$$4x + 3y = 12$$

R.: $l = \frac{12}{5}$

21) *Determinar las ecuaciones de las rectas que contengan respectivamente a los lados de un triángulo, cuyos vértices son:*

A (5 ; 0) ; B (1 ; 2) ; C (−3 ; −2)

R.: $\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = x + 1 \\ y = \frac{x}{4} - \frac{5}{4} \end{cases}$

22) *Calcular las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados son:*

$$\begin{cases} \overline{AB} : y = -x + 1 \\ \overline{BC} : y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \\ \overline{AC} : y = \frac{5}{3}x + 5 \end{cases}$$

R.: $\begin{cases} A\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right) \\ B\left(\frac{5}{3} ; -\frac{2}{3}\right) \\ C\left(-\frac{30}{7} ; -\frac{30}{7}\right) \end{cases}$

23) *Calcular los ángulos de un triángulo cuyos lados están expresados por las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

R.: $\begin{cases} 71° \, 34' \\ 63° \, 26' \\ 45° \end{cases}$

24) *Determinar el ángulo que forman las rectas:*

$$y = -3x + 2$$
$$y = -3x - 4$$

R.: Rectas paralelas

25) *Calcular la distancia entre:*

a) A (2 ; 5) *y la recta* $y = \frac{2}{3}x -$

R.: $\frac{17}{\sqrt{13}}$

b) B (0 ; 1) *y la recta* $y = \frac{x}{2} + 1$

R.: 0

26) *Dada la recta*

$$4x + 3y = 12$$

1) *calcular su distancia al origen;*

2) *determinar la ecuación de la perpendicular a la recta trazada por el origen.*

R.: 1º) $\frac{12}{5}$; 2º) $y = \frac{3}{4}x$

27) *Determinar la ecuación de la paralela a la recta*

$$4x - y = -6$$

que pase por el punto P (5 ; 3)

R.: $4x - y = 17$

28) *Calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas:*

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases}$$

R.: $x_1 = -2$
$y_1 = -3$

29) *Hallar una perpendicular a la recta* $y = 3x - 2$ *que pase por el punto* (3, 2).

R.: $y = -\frac{1}{3}x + 3$

30) *Determinar la ecuación de la recta paralela a*

$$y = \frac{4}{5}x + 3$$

que pase por el punto (5, 2).

R.: $y = \frac{4}{5}x - 2$

31) *Verificar analítica y gráficamente que dos de las tres rectas determinadas por A (1, 1), B (3, 3) y C (5, 1) son perpendiculares.*

R.: AB ⊥ BC

32) *¿Forman un rectángulo las rectas* $2x + 3y = 7$; $6x = 4y + 5$; $3x - 2y - 4 = 0$; $6y = 9 - 4x$?

R.: Si

33) *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto* (2, 3) *con una pendiente de* -3.

R.: $y + 3x = 9$

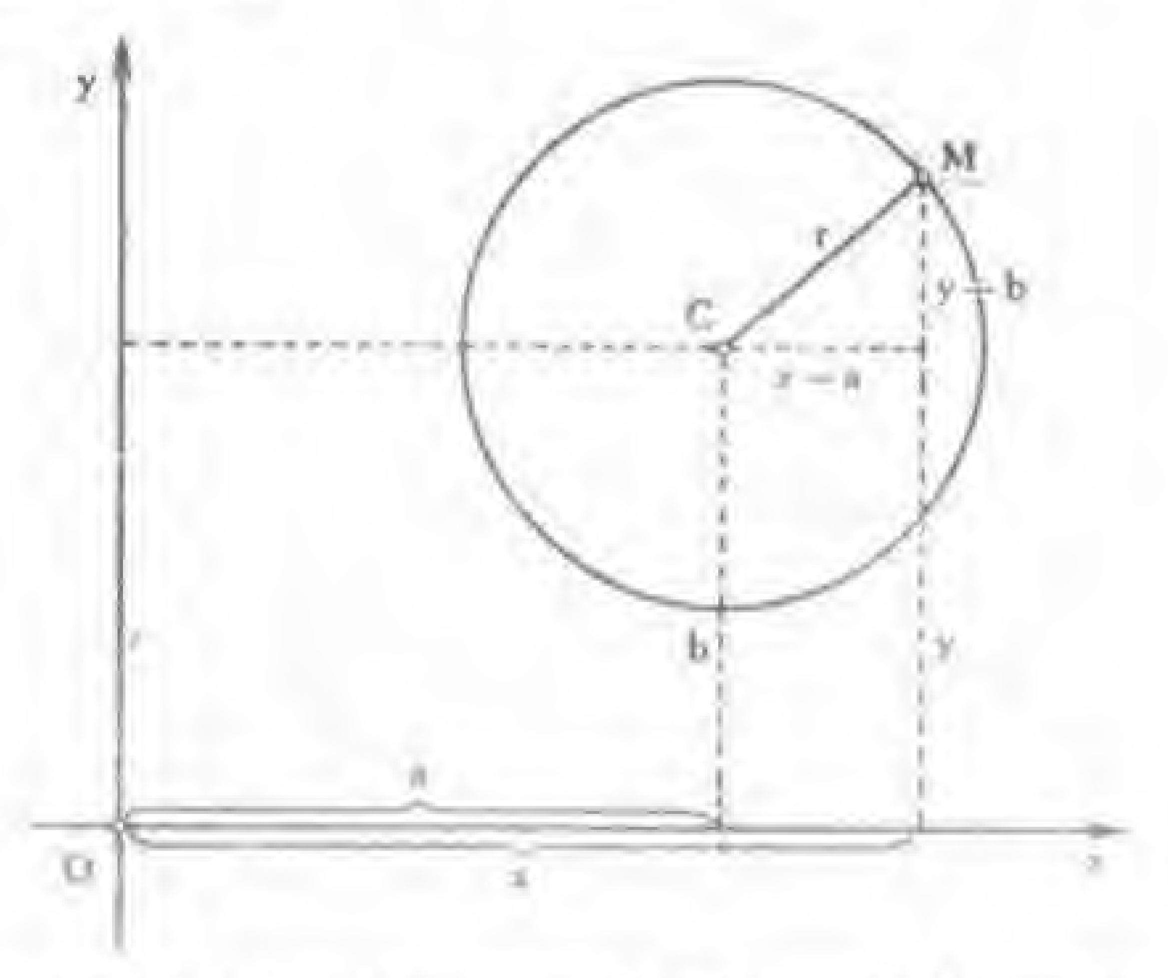
34) *Verificar gráfica y analíticamente que el triángulo de vértice A (2/4), B (9/2) y C (8/11,75) es isósceles y calcular la pendiente de la recta AB.*

R.: Es isósceles

$m = \frac{2}{[illegible]}$

3 ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA

Ecuación de la circunferencia. — La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro.



Llamemos (a, b) a las coordenadas del centro. Cualquier punto M (x, y) de la circunferencia dista de C (a, b) una distancia igual al radio (r), luego en todos los triángulos rectángulos que se forman con las coordenadas de los puntos (x, y) en relación con el centro se producirá la siguiente igualdad

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

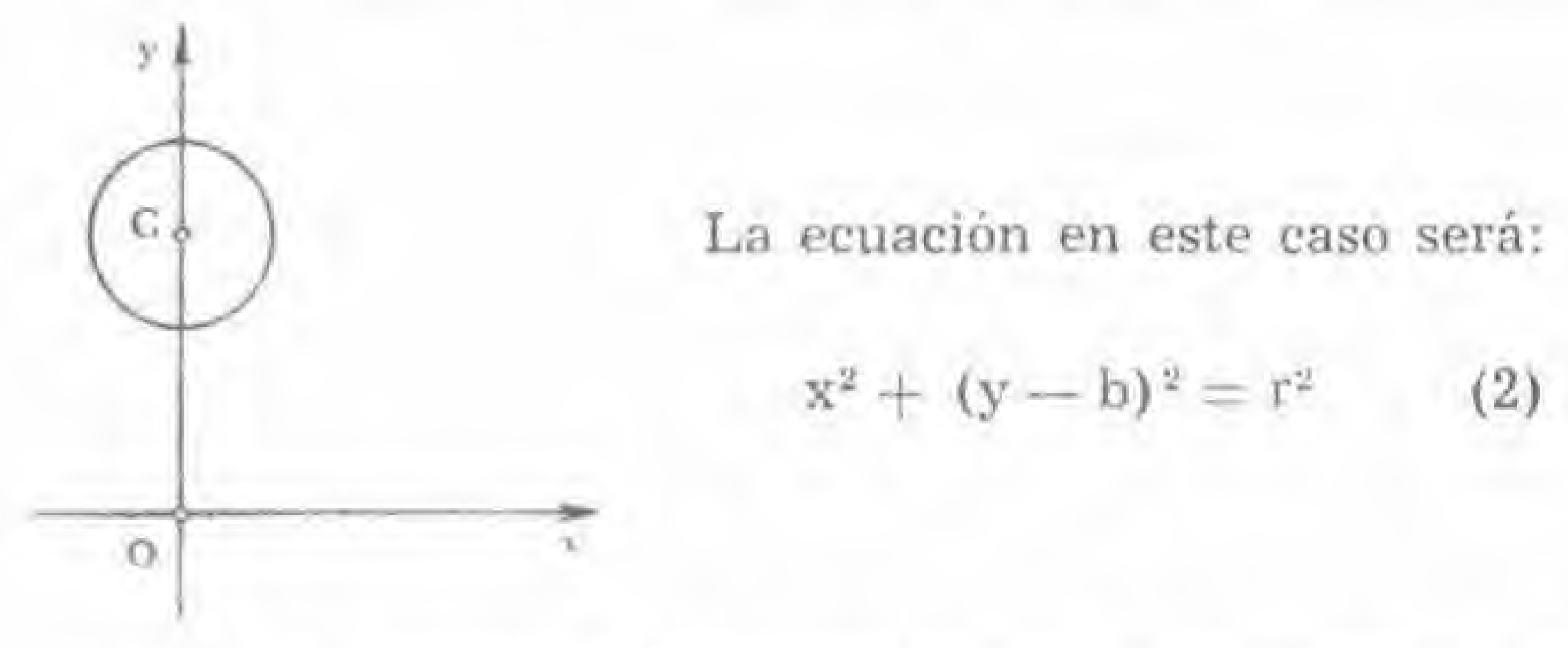
ecuación que se cumple en todas las circunferencias

Casos particulares.

1º Si el centro de la circunferencia pertenece al eje de abscisas es $b = 0$.

Luego, la ecuación se reduce a

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$



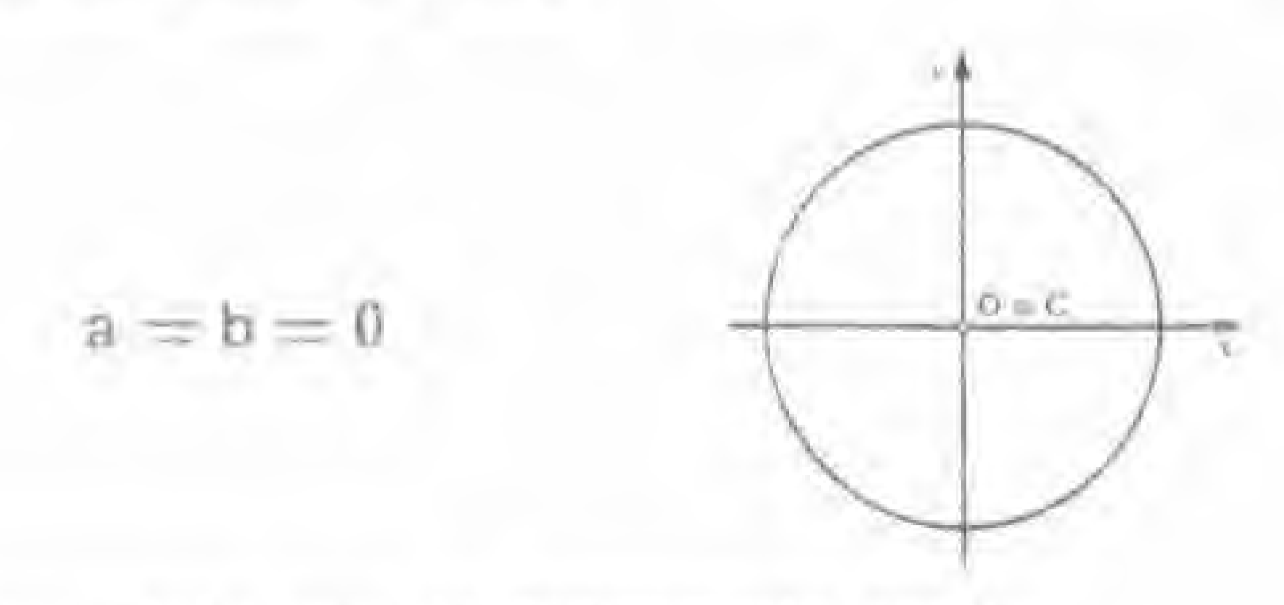
2º Si el centro pertenece al eje de ordenadas es $a = 0$.

La ecuación en este caso será:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

3º Si el centro de la circunferencia se confunde con el origen de las coordenadas, resulta

$$a = b = 0$$



por lo tanto, la ecuación que la representa será:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

La característica de las ecuaciones (1), (2) y (3) es que son *implícitas* de *segundo grado*.

Característica de la ecuación general de la circunferencia.

La ecuación general de la circunferencia es

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Si se desarrolla, se obtiene

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$

o bien

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0}$$

Características:

1) La ecuación es de segundo grado en (x) y en (y), con coeficientes iguales a la unidad.
2) No tiene término rectangular, o sea que no contiene el producto (x y).
3) El coeficiente de (x) es el doble de la abscisa del centro con signo cambiado; el coeficiente de (y) es el doble de la ordenada del centro con signo cambiado.
4) El término independiente es igual a

$$a^2+b^2-r^2$$

Llamando A y B a los coeficientes de los términos en (x) e (y), respectivamente, y C al término independiente, tenemos

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

Por lo tanto, toda ecuación de este tipo define una circunferencia.

Intersección de recta y circunferencia

Las coordenadas de los puntos de intersección serán las soluciones del sistema de ecuaciones formado por la recta

$$y=mx+b$$

y la circunferencia

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Si resolvemos el sistema por el método de substitución, es decir, reemplazando en la ecuación de la circunferencia el valor de (y) obtenido de la ecuación explícita de la recta, tendremos

$$x^2+(mx+b)^2+Ax+B(mx+b)+C=0$$

Operando y haciendo transformaciones se llega a una ecuación de segundo grado de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

en donde

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejercicios

I) *Hallar la ecuación desarrollada de la circunferencia cuyo centro es el punto (3, 5) y el radio vale 2:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=2^2$$
$$x^2-6x+9+y^2-10y+25-4=0$$

y, en fin,

$$\boxed{x^2+y^2-6x-10y+30=0}$$

II) *Calcular las intersecciones entre la circunferencia*

$$x^2+y^2=25$$

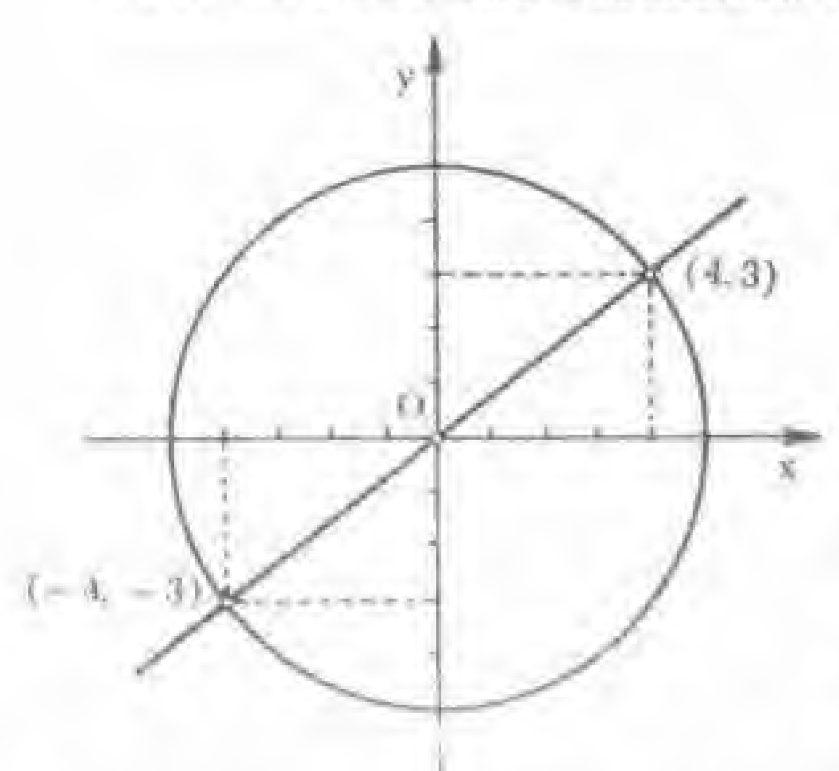
y la recta

$$y=\frac{3}{4}x$$

Reemplazando (y) por el valor dado en la segunda ecuación, se tiene:

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=25$$

Reduciendo los términos semejantes



$$\frac{25}{16}x^2 = 25$$

luego

$$x^2 = \frac{25}{\frac{25}{16}} = 16$$

O bien

$$x = \pm 4$$

para $x_1 = 4$; $y_1 = 3$
para $x_2 = -4$; $y_2 = -3$

Por lo tanto, los puntos de intersecciones son (4, 3) y (—4, —3).

III) *Determinar las intersecciones de la recta* $y = x + 1$ *con la circunferencia de centro* C (2, 0) *y radio* 3:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x - 2)^2 + y^2 = 3^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \text{ (circunferencia)} \\ y = x + 1 \text{ (recta)} \end{cases}$$

Reemplazando

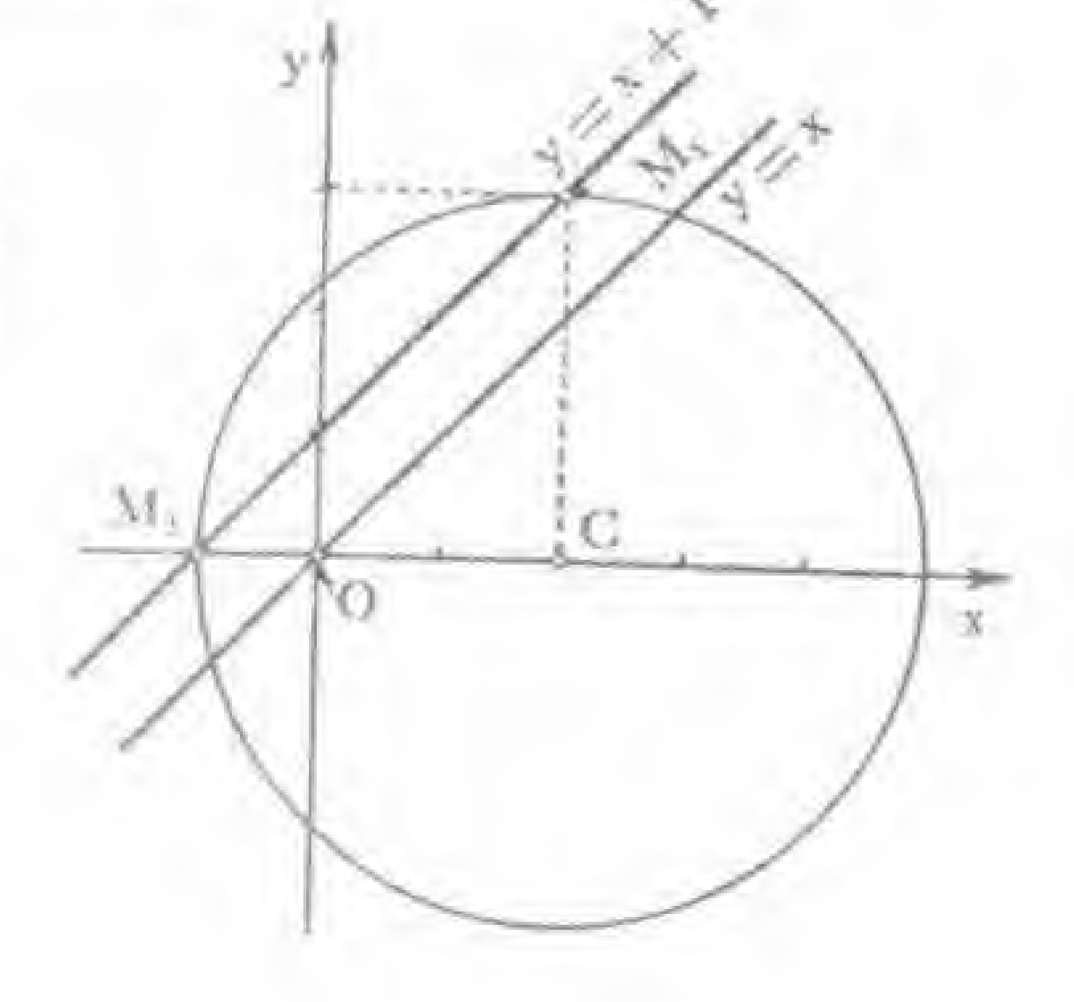
$$x^2 + (x + 1)^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 5 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Aplicando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se obtiene

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$



para $x_1 = 2$; $y_1 = 3$ $\Rightarrow$ M_1 (2, 3)
para $x_2 = -1$; $y_2 = 0$ $\Rightarrow$ M_2 (−1, 0)

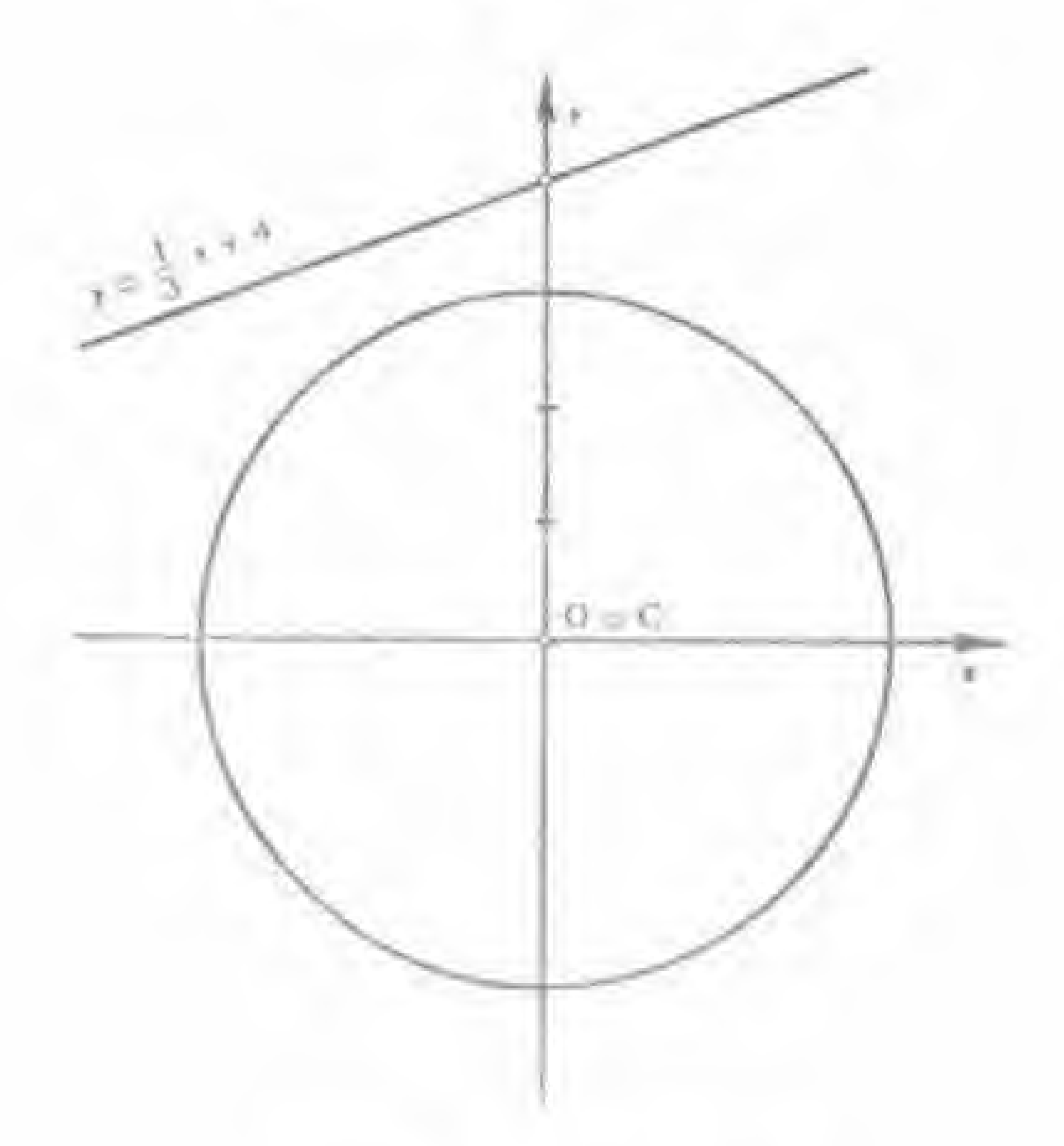
Observación. — Cuando las raíces son complejas, no hay puntos de corte reales y viceversa.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3 \\ y = \frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

Solución

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 16 - 9 = 0$$

$$\frac{10}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 7 = 0$$



$$10x^2 + 24x + 63 = 0$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 2520}}{20} = \frac{-24 \pm \sqrt{-1944}}{20}$$

es decir, presenta raíces complejas.

Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.

Sean los puntos

$$P_1\ (-2, 0) \quad ; \quad P_2\ (0, 5) \quad ; \quad P_3\ (0, -1)$$

La ecuación es de la forma

$$x^2 + y^2 + A\,x + B\,y + C = 0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos a determinar los números A, B, C. Como los puntos dados son puntos de la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma, o sea deben verificarse simultáneamente las relaciones:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + A\,x_1 + B\,y_1 + C = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + A\,x_2 + B\,y_2 + C = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + A\,x_3 + B\,y_3 + C = 0 \end{cases}$$

o bien, reemplazando en cada una de las ecuaciones los valores de las coordenadas dadas

$$\begin{cases} 4 - 2\,A + C = 0 \\ 25 + 5\,B + C = 0 \\ 1 - \ \ B + C = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones, en el que las incógnitas son los coeficientes o parámetros A, B, C.

Resuelto el sistema se obtienen las raíces:

$$A = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B = -4 \quad ; \quad C = -5$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es

$$\boxed{x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\,x - 4\,y - 5 = 0}$$

Coordenadas del centro (a, b)

Como $A = -2\,a = -\dfrac{1}{2}$ es $a = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-2} = +\dfrac{1}{4}$

Análogamente

$B = -2\,b = -4$ luego $b = \dfrac{-4}{-2} = +2$

Valor del radio

Como $C = a^2 + b^2 - r^2 = -5$

es $r^2 = a^2 + b^2 + 5$

o bien $r^2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + (2)^2 + 5$

luego $r = \sqrt{\dfrac{145}{16}} \simeq 3$

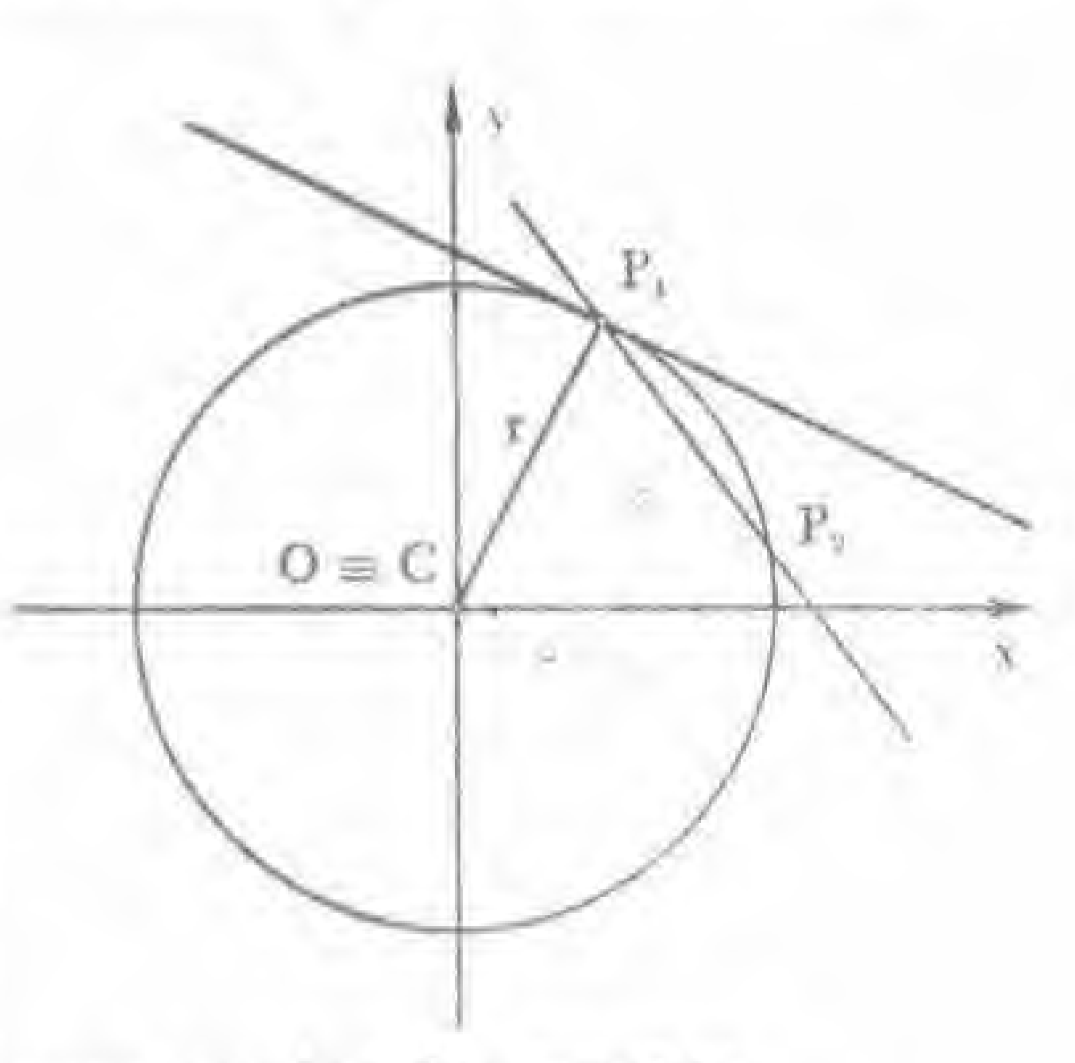
Tangente y normal a la circunferencia

Consideremos una circunferencia con centro en el origen de un sistema de ejes ortogonales para mayor sencillez.

Sea, pues, la circunferencia dada

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y $P_1\ (x_1, y_1)$ un punto tomado sobre ella.



Consideremos un segundo punto $P_2\ (x_2, y_2)$ también sobre la circunferencia y tracemos la secante $P_1 P_2$ cuya ecuación es la de la recta que pasa por los dos puntos.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1)$$

luego

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (1)$$

Si hiciésemos tender $P_2 \to P_1$, la secante tendería a la tangente buscada y coincidiría con ella cuando se verificase $P_2 \equiv P_1$. Por lo tanto, para lograr la ecuación de la tangente basta pasar al límite en la ecuación de la secante, haciendo

$$x_2 = x_1$$
$$y_2 = y_1$$

Pero este pasaje no puede hacerse directamente sin que resulte una indeterminación, la cual proviene de que en dicha ecuación no aparece expresado que los puntos P_1 y P_2 están sobre la circunferencia.

Por estar sobre esta curva, se infiere

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = r^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = r^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

o sea

$$(x_1 - x_2)\ (x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)\ (y_1 + y_2) = 0$$

o también

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \qquad (2)$$

De las relaciones (1) y (2) se obtiene una nueva forma de ecuación de la secante

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

Si pasamos ahora al límite, resulta la *ecuación determinada de la tangente*

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}}$$

Se deduce, prosiguiendo los cálculos que

$$y_1\ (y - y_1) = -\ x_1\ (x - x_1)$$

o bien

$$x_1\ (x - x_1) + y_1\ (y - y_1) = 0$$

o también

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

y como

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

obtendremos

$$\boxed{x_1 x + y_1 y = r^2}$$

que es otra forma de la *ecuación de la tangente*.

Como se observa, puede deducirse inmediatamente de la ecuación de la circunferencia, expresada así

$$x\,x + y\,y = r^2$$

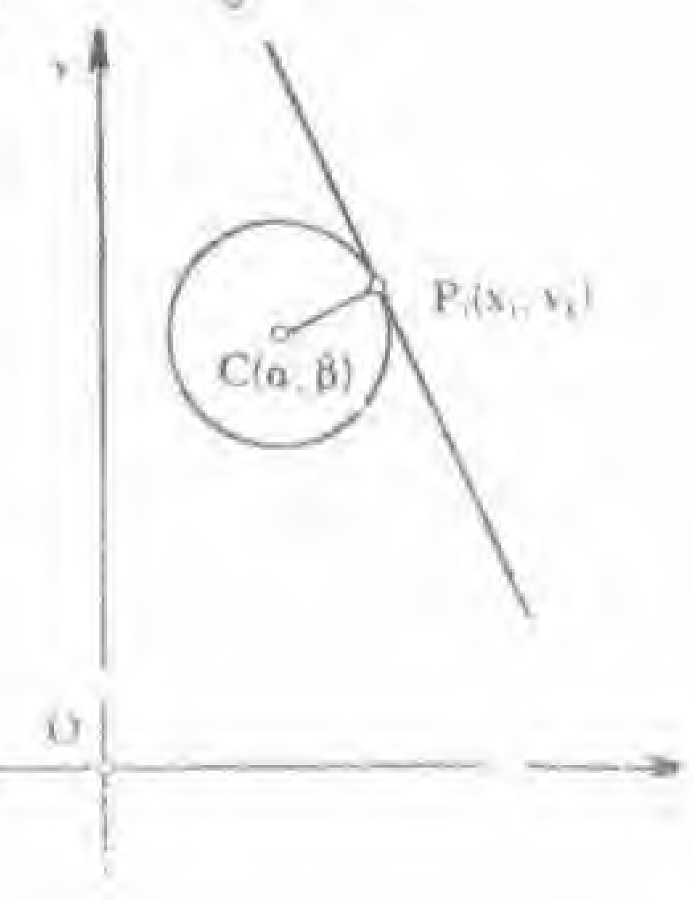
Así, por ejemplo, si la ecuación de la circunferencia fuese

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

deduciríamos análogamente, como ecuación de la tangente en $P_1\ (x_1\, y_1)$

$$(x_1 - \alpha)\ (x - \alpha) + (y_1 - \beta)\ (y - \beta) = r^2$$

Ecuación de la normal. — Se llama *normal* a una circunferencia en uno de sus puntos al segmento de perpendicular a la tangente en dicho punto comprendido entre ésta y el centro de la circunferencia.



Por lo tanto, la ecuación de la *normal* en el punto $P_1\ (x_1, y_1)$ no es sino la ecuación del radio $\overline{CP_1}$, o sea

$$y - \beta = \frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}\ (x - \alpha)$$

Ejercicios

I) *Determinar la ecuación de la circunferencia, conociendo el radio y el centro.*

a) $r = 5$ $\quad C\ (-3, 2)$ $\quad$ R.: $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$

b) $r = 2$ $\quad C\ (5, 3)$ $\quad$ R.: $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0 \end{cases}$

c) $r = 8$ $\quad C\ (-2, -6)$ $\quad$ R.: $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+6)^2 = 8^2 \\ x^2 + y^2 + 4x + 12y - 24 = 0 \end{cases}$

d) $r = 2$ $\quad C\ (1\ ; -2)$ $\quad$ R.: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

e) $r = 4$ $\quad C\ (0\ ; 0)$ $\quad$ R.: $x^2 + y^2 = 16$

II) *Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.*

a) $P_1\ (2, 3)$ $\quad P_2\ (4, 5)$ $\quad P_3\ (6, 1)$

R.: $x^2 + y^2 - \frac{26}{3}x - \frac{16}{3}y + \frac{61}{3} = 0$

b) $P_1\ (5, 0)$ $\quad P_2\ (2, 3)$ $\quad P_3\ (5, 6)$

R.: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

c) $P_1\ (-2, 6)$ $\quad P_2\ (2, 2)$ $\quad P_3\ (2, 10)$

R.: $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 24 = 0$

III) *Establecer la ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto.*

a) $x^2 + y^2 = 25$ $\quad P_1\ (3, 4)$

R.: $3x + 4y = 25$

b) $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 64$ $\quad P_1\ (-2, -14)$

R.: $y = -14$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ $\quad ; \quad P_1\ (3,\ 2)$

R.: $y = -\frac{1}{2}x + 3.5$

d) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 36$ $\quad P_1\ (3, 2)$

R.: $x + 2y - 15 = 0$

IV) *Resolver los sistemas:*

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0 \end{cases}$ $\quad$ R.: $A\ (4, 3)$ $\quad B\ (2, 1)$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $\quad$ R.: $A\ (3, 1)$ $\quad B\ (2, 0)$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$ $\quad$ R.: $A\ (2, 3)$ $\quad B\ (5, 6)$

V) *Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio de la misma:*

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

R.: $C\ (1\ ; 1)\ ;\ r = 1$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ $\quad$ R.: $C\ (-2\ ; 3)\ ;\ r = 4$

VI) *Determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia*

$$x^2 + y^2 = 45$$

paralela a la recta

$$2y + x = 2$$

R.: $y = -\frac{x}{2} \pm \frac{15}{2}$

VII) *Determinar la ecuación de la tangente en el origen a la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{21}{38}y = 0$$

R.: $y = -\frac{19}{7}x$

VIII) *Determinar la ecuación de la normal en el punto* $(1\ ; 6)$ *a la circunferencia* $\quad x^2 + y^2 = 37$

R.: $y = 6x$

IX) *Determinar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia:* $\quad x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$
que salen del punto $(3\ ; 0)$.

R.: $y = (6 \pm \sqrt{30})\ (x - 3)$

X) *Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto* $(0\ ; 2)$ *y es tangente en el origen a la recta:*

$$y = -2x$$

R.: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

XI) *Hallar las intersecciones de circunferencia y recta:*

$$\{x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \cap y = 2x - 1\}$$

R.: $\begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 1 \\ y_1 = 1 & y_2 = 1 \end{cases}$
$y = 2x - 1$ (recta tangente)

XII) *Calcular:*

$$\left\{ (x^2 + y^2 = 4) \quad \cap \quad \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1\right)\right\}$$

R.: raíces imaginarias

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ (recta exterior)

XIII) *Calcular:*

a) $\{(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \cap \quad (x-7)^2 + (y-3)^2 = 4\}$

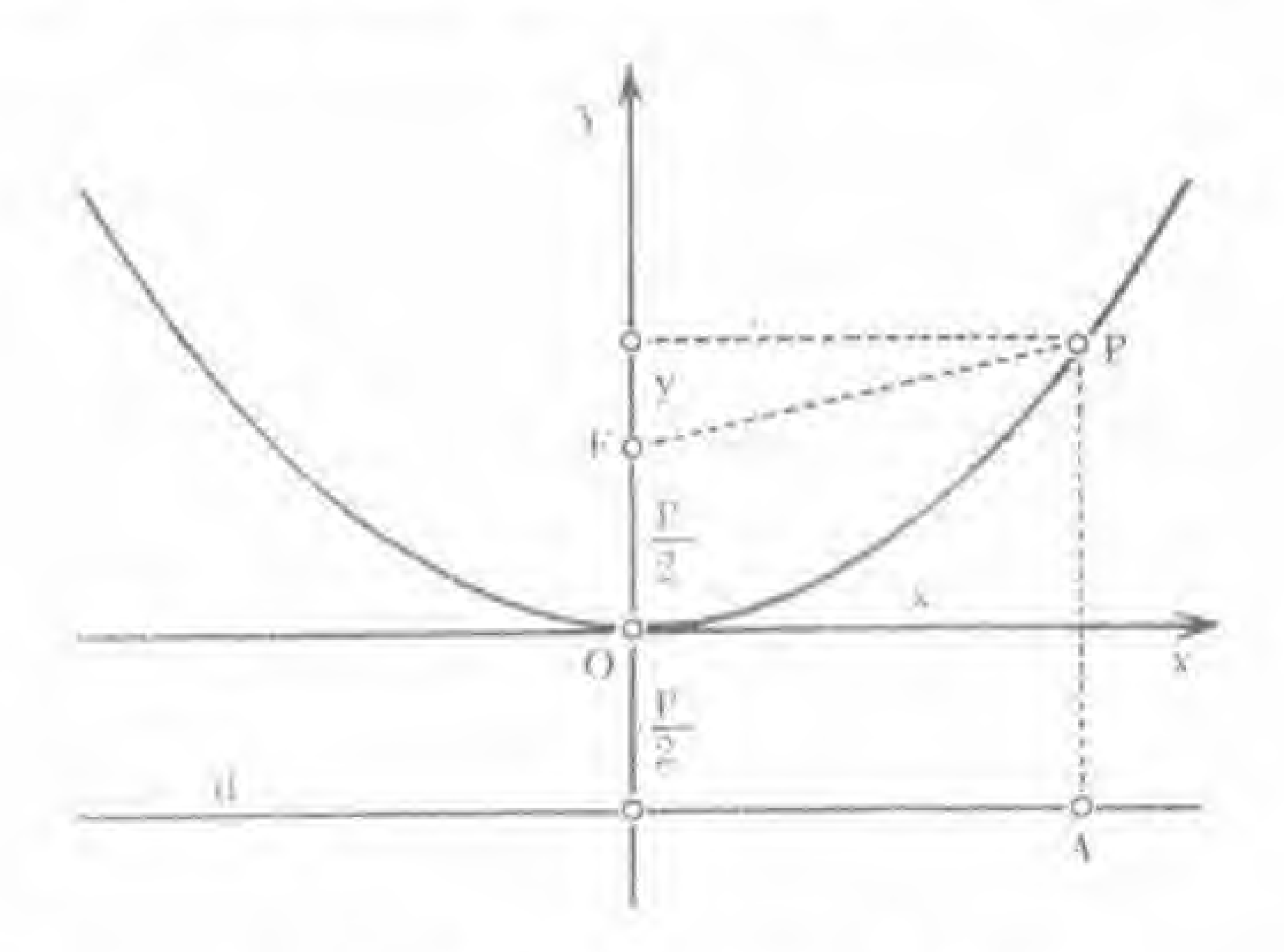
b) *Determinar la distancia de los centros.*

R.: a) $\{9, 3\}$
(circunferencias tangentes interiores)

b) $\overline{OO'} = 3$

ESTUDIO DE LA PARABOLA 4

Ecuación de la Parábola. — *Parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada *directriz* y de un punto fijo, llamado *foco*.



La distancia entre la directriz y el foco se representa por (p).

Cualquier punto P, de la parábola, de coordenadas (x, y), realiza según la definición

$$\overline{FP} = \overline{PA}$$

Teniendo en cuenta la figura, resulta

$$\overline{FP}^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\overline{PA}^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

Como los primeros miembros son iguales, se tendrá

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

de donde,

$$x^2 + y^2 - 2\frac{p}{2}y + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + 2\frac{p}{2}y + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

reduciendo términos y simplificando, se obtiene

$$x^2 = 2py$$

o bien

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Si hacemos

$$\frac{1}{2p} = a \quad \text{(constante)}$$

se tiene

$$\boxed{y = a x^2}$$

que es la *ecuación de la parábola* que pasa por el origen de las coordenadas.

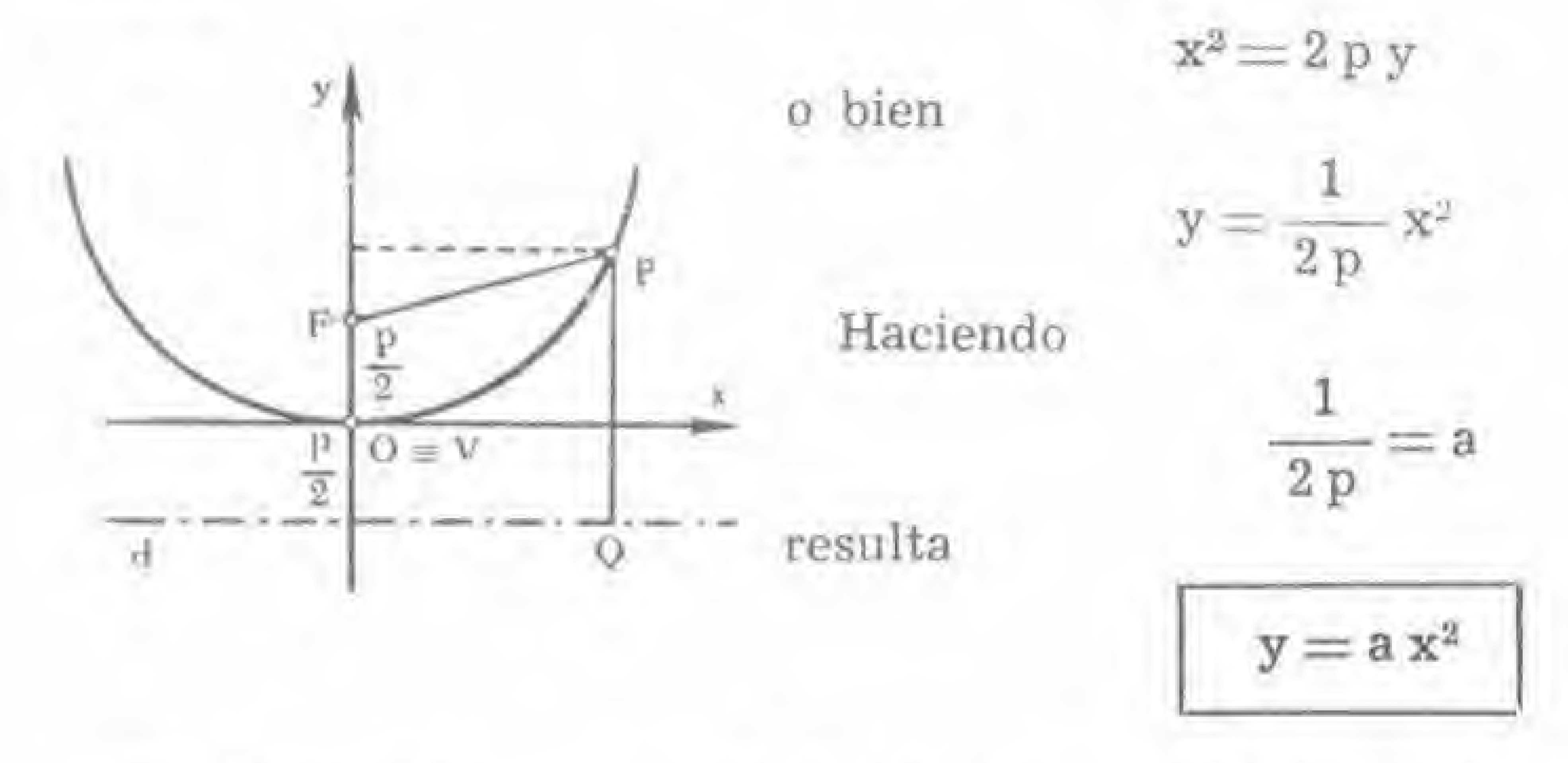
La discusión de esta ecuación, muy sencilla, se reduce a la comprobación de las siguientes propiedades:

a) La curva es simétrica respecto de su eje.

b) La curva se encuentra íntegramente contenida en el semiplano positivo, respecto del eje de abscisas.

Posiciones de la Parábola

I) La ecuación de la parábola que pasa por el origen y cuya rama está situada en el semiplano de las (y) positivas es



$$x^2 = 2py$$

o bien

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Haciendo

$$\frac{1}{2p} = a$$

resulta

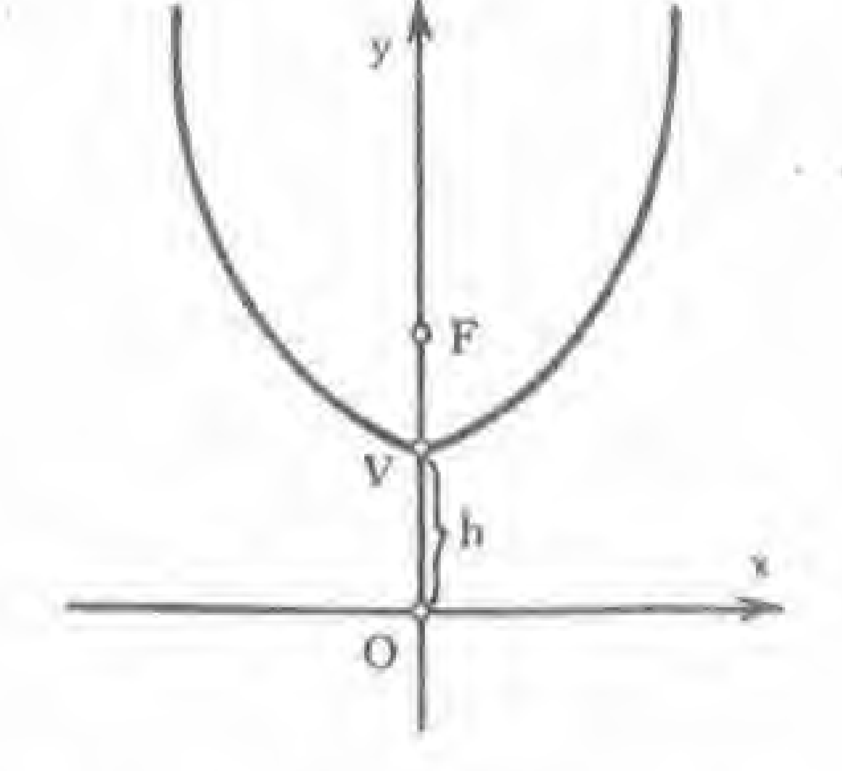
$$\boxed{y = a x^2}$$

II) Cuando la curva está desplazada y todas las *ordenadas* de la misma están aumentadas en un valor (h) igual al de la ordenada en el origen, la ecuación se convierte en

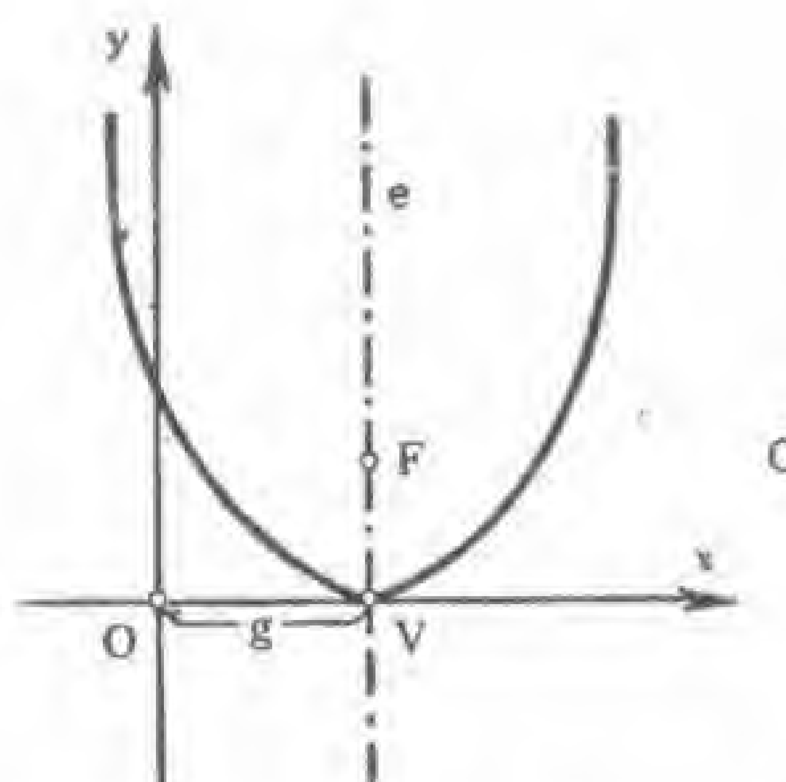
$$y = \frac{1}{2p}x^2 + h$$

o bien

$$\boxed{y = a x^2 + h}$$



III) Si el foco no está situado en el eje de las ordenadas, sino que está desplazado una distancia (g) del mismo estando el vértice en el eje de las abscisas, la ecuación que resulta es

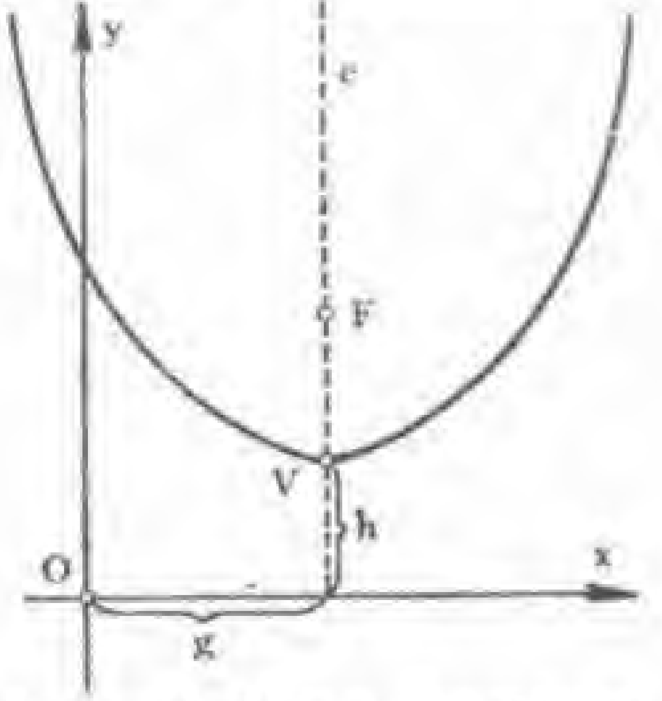


$$y = \frac{1}{2p}(x-g)^2$$

o bien

$$\boxed{y = a\,(x-g)^2}$$

IV) Cuando el *vértice* de la parábola es de *ordenada* (h) y su foco no está en el eje de las (y), la ecuación correspondiente es



$$y = \frac{1}{2p}(x-g)^2 + h \qquad (1)$$

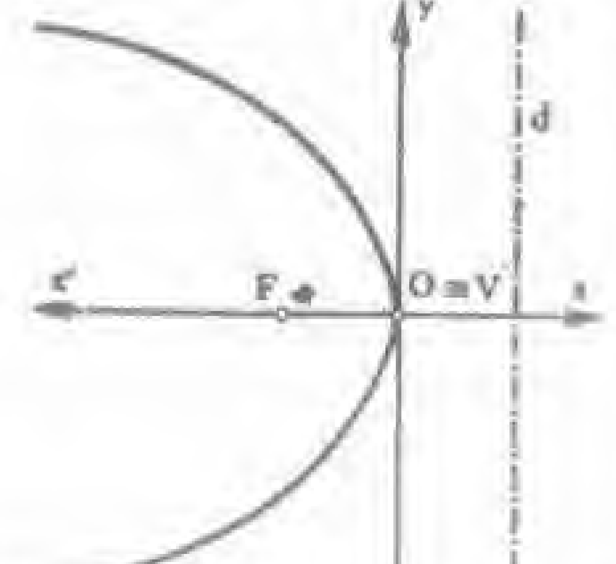
o bien

$$\boxed{y = a\,(x-g)^2 + h}$$

V) Si la parábola está situada en el semiplano positivo de las x, siendo las coordenadas del foco $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ la ecuación es

$$x = \frac{1}{2p}y^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = a\,y^2}$$

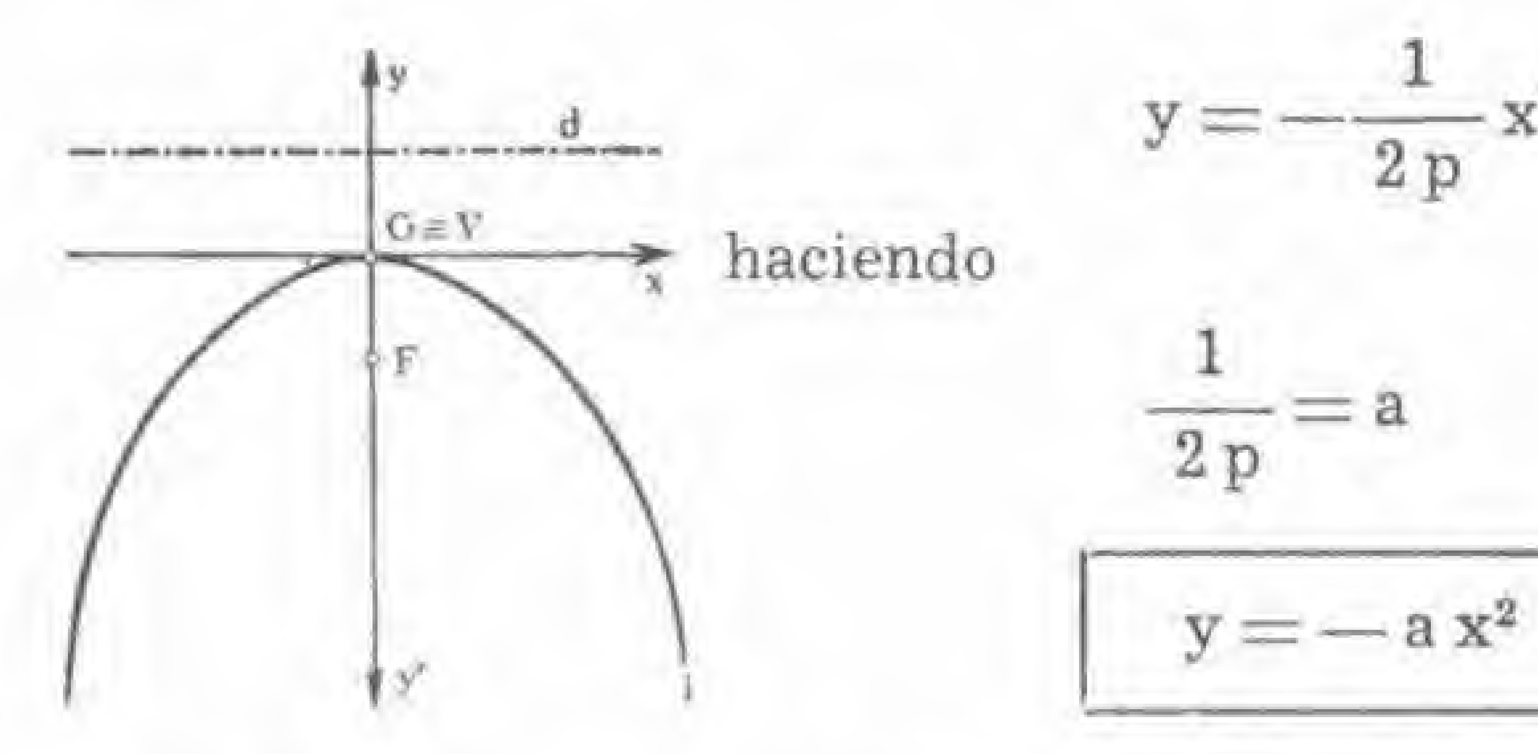
VI) Si la parábola está situada en el semiplano de las (x) *negativas,* siendo las coordenadas del foco $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$



la ecuación es $x = -\frac{1}{2p}y^2$

o bien $\boxed{x = -a\,y^2}$

VII) Por último si la parábola está situada en el semiplano de las (y) negativas, siendo las coordenadas del foco $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ la ecuación tiene la forma



$$y = -\frac{1}{2p}x^2$$

haciendo

$$\frac{1}{2p} = a$$

$$\boxed{y = -a\,x^2}$$

Ecuación general de la parábola. — Se ha estudiado en el párrafo anterior que la ecuación de la parábola es

$$y = a\,(x-g)^2 + h$$

cuando las coordenadas del vértice son (g, h).

Desarrollando el cuadrado y efectuando las operaciones indicadas, se tiene

$$y = a\,[x^2 - 2\,x\,g + g^2] + h$$

o bien

$$y = a\,x^2 - 2\,x\,g\,a + a\,g^2 + h$$

haciendo

$$-2\,g\,a = b \qquad (1)$$

y

$$a\,g^2 + h = c \qquad (2)$$

resulta la *ecuación general*

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c}$$

Significado de los coeficientes.

a) El coeficiente (a) expresa la mayor o menor abertura de la curva.

Si (a) es negativo la curva se extiende hacia abajo, es decir, el vértice es punto **máximo.**

b) El coeficiente (b) da la traslación horizontal.

c) El término independiente (c) da la ordenada al origen.

Coordenadas del vértice de la parábola. — Teniendo en cuenta las relaciones (1) y (2), resulta que las coordenadas del vértice (g, h) valen

$$g = -\frac{b}{2a} \qquad h = c - a g^2$$

Aplicaciones

I) *Problema del tiro en el vacío.*

El problema del tiro es la resultante de dos movimientos:

a) El movimiento rectilíneo y uniforme obtenido por efecto del explosivo de la pólvora.

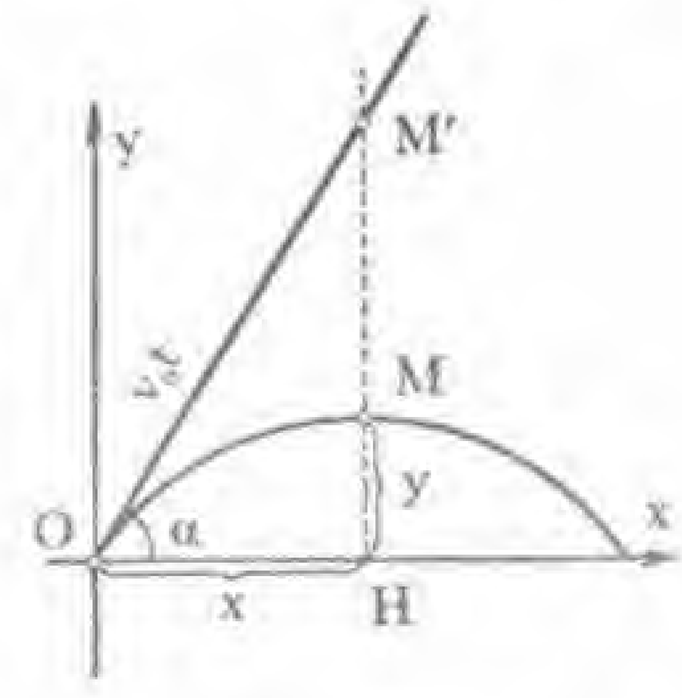
b) El movimiento vertical descendente debido a la gravedad.

La trayectoria del proyectil es una curva cuya ecuación determinaremos:

α = ángulo de tiro

$$x = v_o t \cos\alpha = \overline{OH} \qquad (1)$$

$$\overline{MM'} = \frac{1}{2} g t^2$$



$$\overline{MM'} = v_o t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Despejando el valor de (t) en (1)

$$t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$$

sustituyendo en (2)

$$y = v_o \frac{x}{v_o \cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} x^2 \qquad (3)$$

haciendo

$$\operatorname{tg}\alpha = b \quad ; \quad \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} = a$$

resulta, en fin,

$$y = -a x^2 + b x$$

Dado que esta ecuación carece de término independiente, la parábola pasa por el origen.

El coeficiente del término de 2º grado es negativo, luego el vértice de la parábola es su *máximo*.

Alcance del proyectil. **— Si en la relación (3) hacemos $y = 0$, resulta**

$$x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} x^2 = 0$$

Despejando (x), es decir, **la abscisa, se obtiene la expresión buscada**

$$x = \frac{2 v_o^2 \cos^2\alpha \, . \, \operatorname{tg}\alpha}{g}$$

o bien

$$x = \frac{2 v_o^2 \cos^2\alpha \; \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{g}$$

y como

$$2 \cos\alpha \, . \, \operatorname{sen}\alpha =$$

resulta, finalmente,

$$\boxed{x = \frac{v \ \text{sen}\, 2\,\alpha}{g}}$$

II) *Ubicar en un plano la parábola de ecuación:*

$$x^2 - x - 6 = y$$

Cálculo de las coordenadas del vértice (g, h):

$$g = -\frac{b}{2\,a}$$

$$g = -\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = +\frac{1}{2}}$$

$$h = c - a\,g^2$$

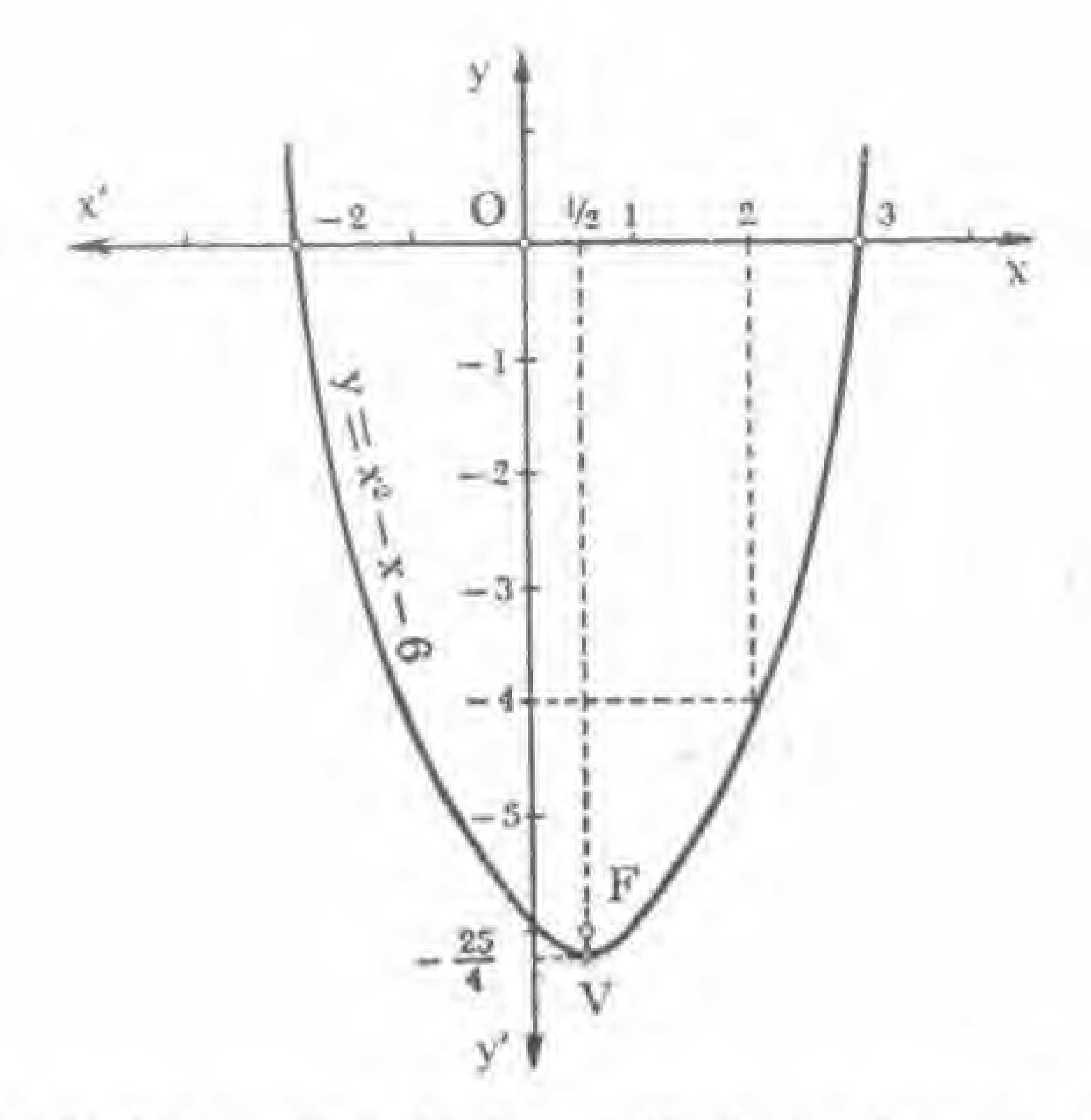
$$h = -6 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = -\frac{25}{4}}$$

Cálculo del parámetro y posición del foco:

$$p = \frac{1}{2\,a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Foco } F\left(g\,;\, h + \frac{p}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Foco } F\left(\frac{1}{2}\,;\, \frac{-25}{4} + \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Foco } F\left(\frac{1}{2}\,;\, \frac{-24}{4}\right)$$



Abscisas de los puntos de la parábola en los que $y = 0$.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

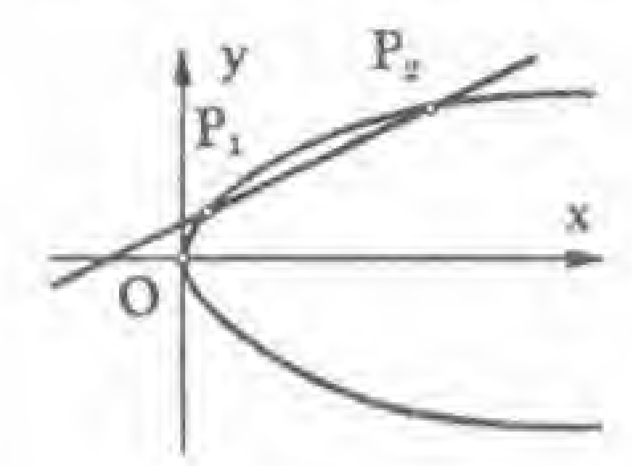
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}}$$

Tangente y normal

Ecuación de la tangente en un punto dado. — Sea el punto $P_1\,(x_1, y_1)$ dado sobre la curva, y la parábola definida por la ecuación

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Se elige otro punto P_2 (x_2, y_2) sobre la curva. La recta determinada por esos dos puntos es



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (1)$$

Si ahora, hiciésemos tender $P_2 \to P_1$ la secante considerada tendería a la tangente buscada y coincidiría con ella cuando se verificase $P_2 \equiv P_1$.

Para obtener la ecuación de la tangente basta pasar al límite en la ecuación (1) de la secante haciendo

$$x_2 = x_1 \quad ; \quad y_2 = y_1$$

Este pasaje no puede hacerse directamente en la ecuación escrita sin que resulte una indeterminación en el segundo miembro, lo cual proviene de que en dicha ecuación no aparece expresado todavía que los puntos P_1 y P_2 están sobre la parábola; vamos, pues, a buscar una nueva expresión del segundo miembro de la ecuación de la secante en que aparezca dicha circunstancia.

Por estar P_1 y P_2 sobre la parábola, se cumple

$$y_1^2 = 2\,p\,x_1$$

$$y_2^2 = 2\,p\,x_2$$

Restando $\qquad y_1^2 - y_2^2 = 2\,p\,x_1 - 2\,p\,x_2$

o bien

$$(y_1 - y_2)\,(y_1 + y_2) = 2\,p\,(x_1 - x_2)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2\,p}{y_1 + y_2} \qquad (2)$$

De las relaciones (1) y (2) se obtiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2\,p}{y_1 + y_2}$$

que es la ecuación de la *secante.*

Pero pasando al límite resulta la *ecuación de la tangente* en el punto P_1

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{p}{y_1}$$

y prosiguiendo los cálculos, se llega a

$$y_1\,y - y_1 = p\,x - p\,x_1$$

pero $\qquad y_1^2 = 2\,p\,x_1$

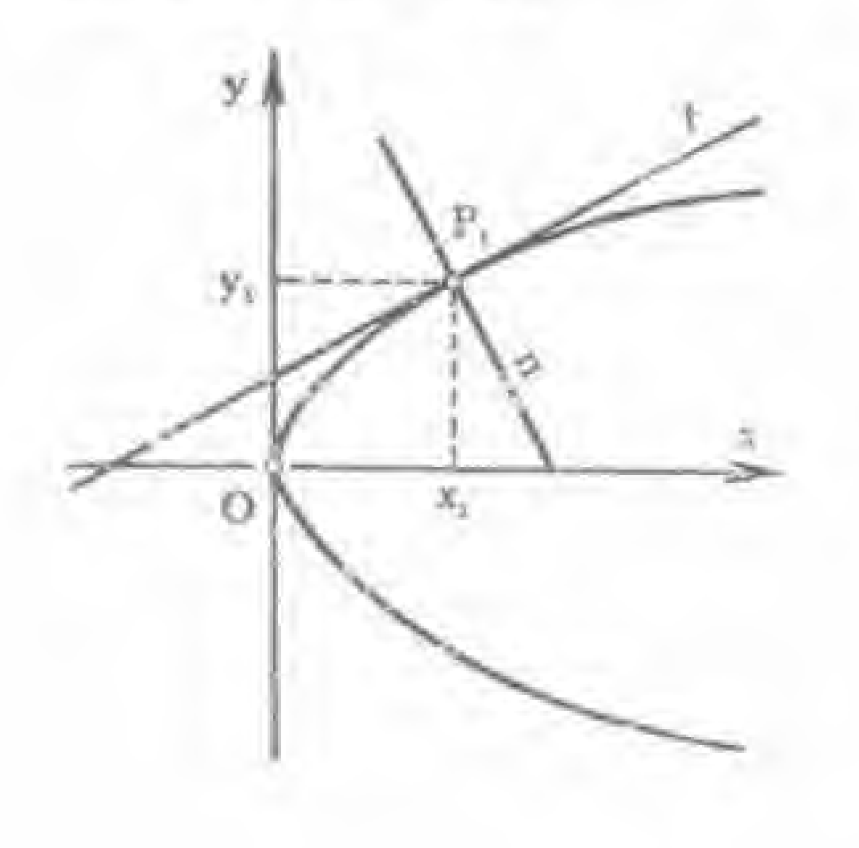
Sumando se infiere $y_1\,y = p\,(x + x_1)$

que es otra expresión de la ecuación de la tangente.

Si la ecuación de la parábola es: $x^2 = 2\,p\,y$ la ecuación de la *tangente* en el punto $(x_1\,y_1)$ es: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_1}{p}$.

Ecuación de la normal. — Se llama *normal* (n) a una parábola en un punto a la perpendicular a la tangente en el mismo.

Si el punto dado es P_1 (x_1, y_1) la ecuación de la tangente en el mismo es



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{p}{y_1}$$

pero como los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares, verifican la relación

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

resulta

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{p}{y_1}$$

O bien

$$y_1 (x - x_1) = -p (y - y_1)$$

y, por lo tanto, la ecuación de la *normal* es

$$\boxed{y_1 (x - x_1) + p (y - y_1) = 0}$$

Ejercicio

Determinar las ecuaciones de la tangente y de la normal a una parábola en un punto de la misma.

Datos $\begin{cases} \text{Parábola } y^2 = 2x. \\ \text{Punto P de abscisa 8 y ordenada positiva.} \end{cases}$

Solución

Cálculo de la ordenada:

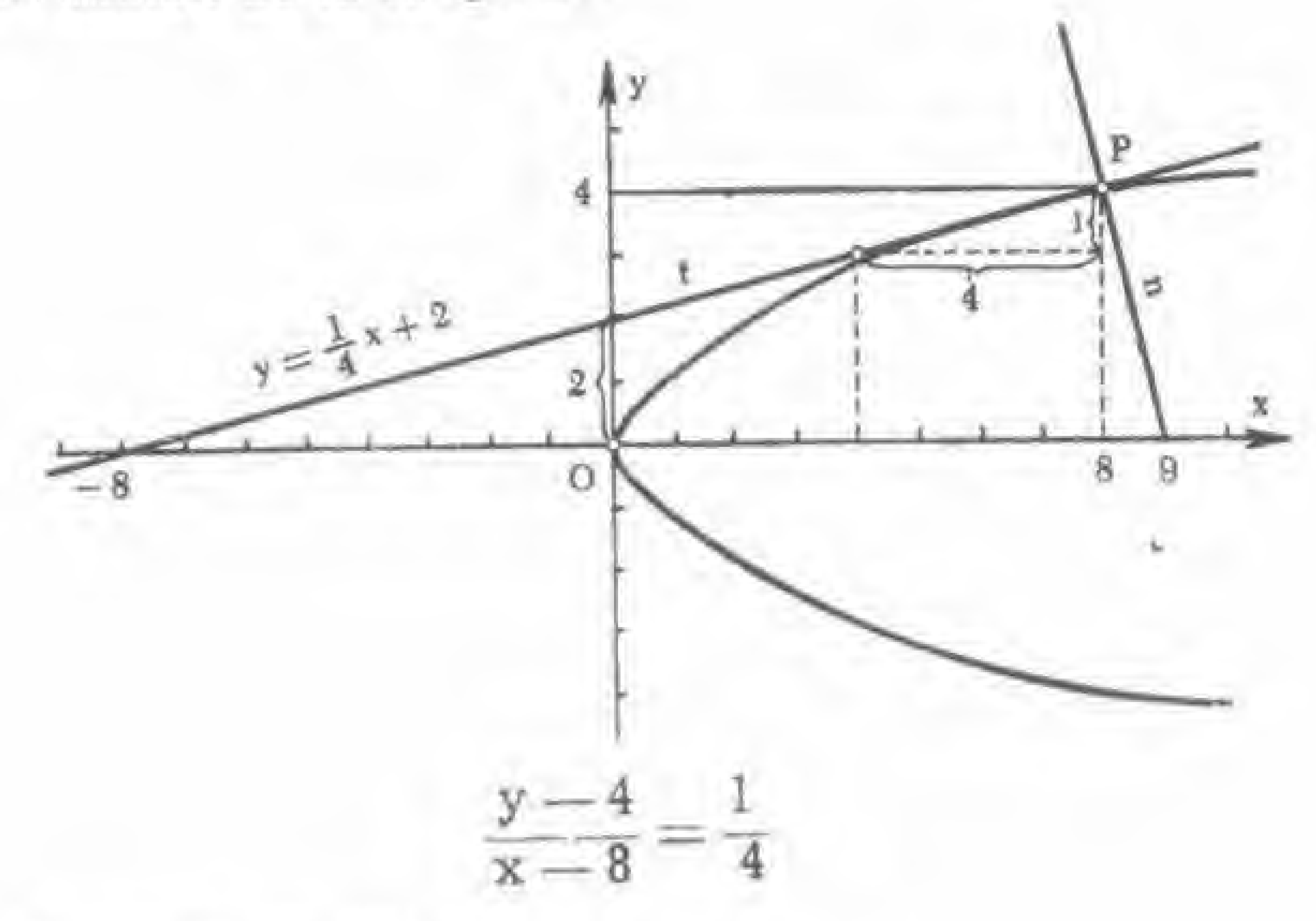
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y^2 &= 2 \cdot 8 \\ y &= \pm\sqrt{16} \end{aligned}$$

$$\boxed{y = +4} \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es } P\,(8, 4)$$

Cálculo del parámetro:

Como $2p = 2 \Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{2} = 1}$

Ecuacion de la tangente:



$$\frac{y - 4}{x - 8} = \frac{1}{4}$$

Operando resulta

$$\boxed{y = \frac{1}{4} x + 2}$$

La ecuación de la *normal* es

$$4 (x - 8) + 1 (y - 4) = 0$$

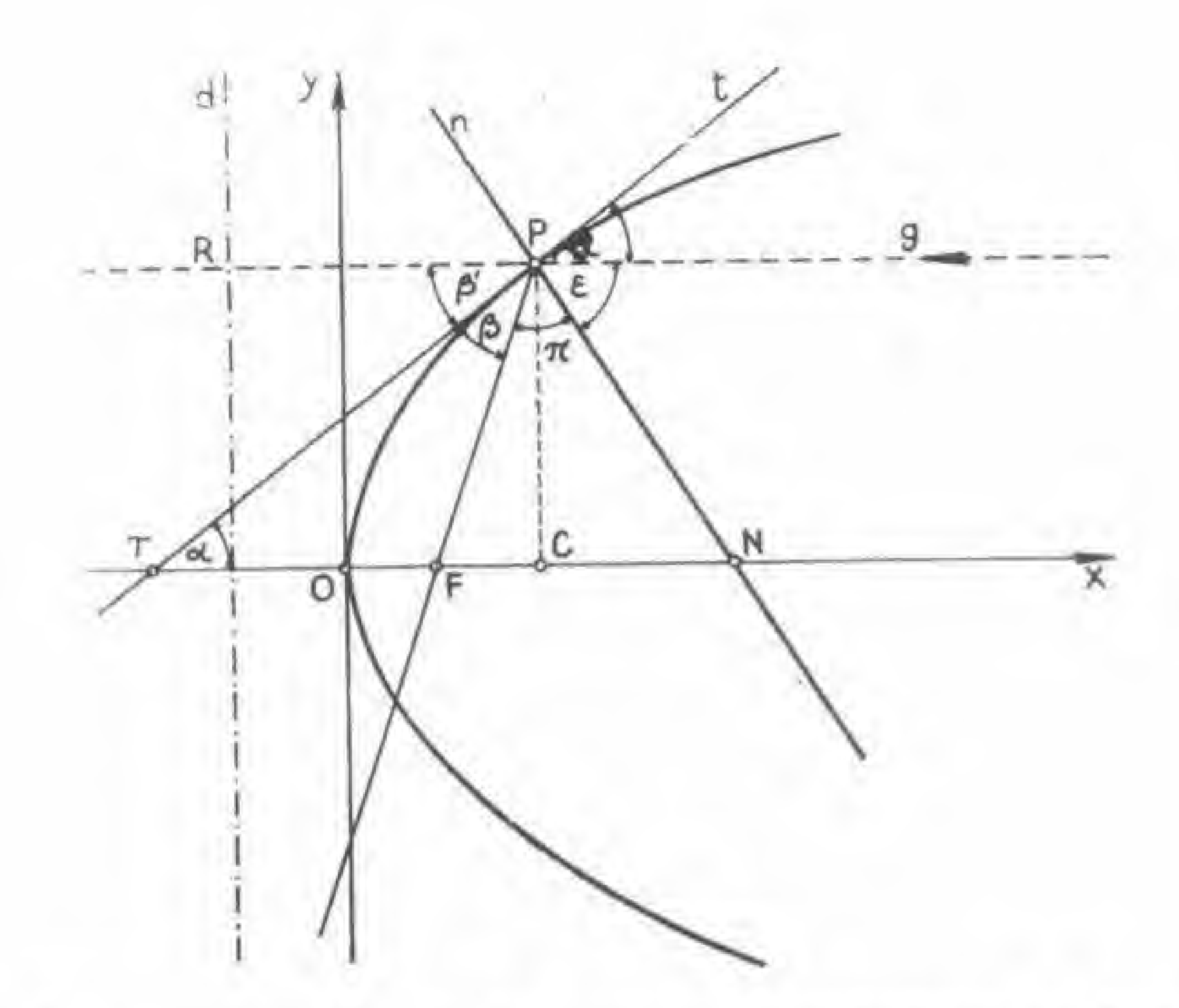
o bien

$$\boxed{y = -4x + 36}$$

Si hacemos $y = 0$, resulta que la normal (n) corta al eje (x) en el punto de abscisa 9.

Propiedades métricas de la tangente

1º *La tangente a la parábola forma ángulos iguales con el eje y con el radio focal del punto de contacto.*



La construcción de los espejos parabólicos se fundamenta en esta propiedad.

Los rayos paralelos a GP al reflejarse sobre las respectivas tangentes en los puntos de contacto, lo harán según PF.

El ángulo de incidencia (ε) es igual al de reflexión (π); todos los rayos paralelos al eje de la parábola se concentrarán en el foco F. Colocada una fuente luminosa en el foco, la *luz reflejada conserva la misma intensidad* hasta una distancia grande de la fuente.

2º *La tangente es la bisectriz del ángulo determinado por los radios vector y director del punto de contacto.*

En la figura anterior:

$\overline{PF}$ representa el radio vector.

$\overline{PR}$ representa el radio director.

β y β′ representan los ángulos determinados por estos dos radios y la tangente.

Luego

$$\boxed{\beta = \beta'}$$

3º *La abscisa al origen de la tangente es igual y de signo contrario a la abscisa del punto de tangencia.*

En la figura anterior:

$\overline{OC}$ representa la abscisa del punto P.

$\overline{OT}$ representa la abscisa del punto en que la tangente corta al eje de las (x).

Por lo tanto,

$$\boxed{\overline{OC} = -\overline{OT}}$$

Intersección de recta y parábola. — Del mismo modo que en la circunferencia, la intersección de recta y parábola se producirá en los puntos que resuelvan el sistema de ecuaciones formado por la recta y la parábola.

Así, por ejemplo:

Si las ecuaciones respectivas son

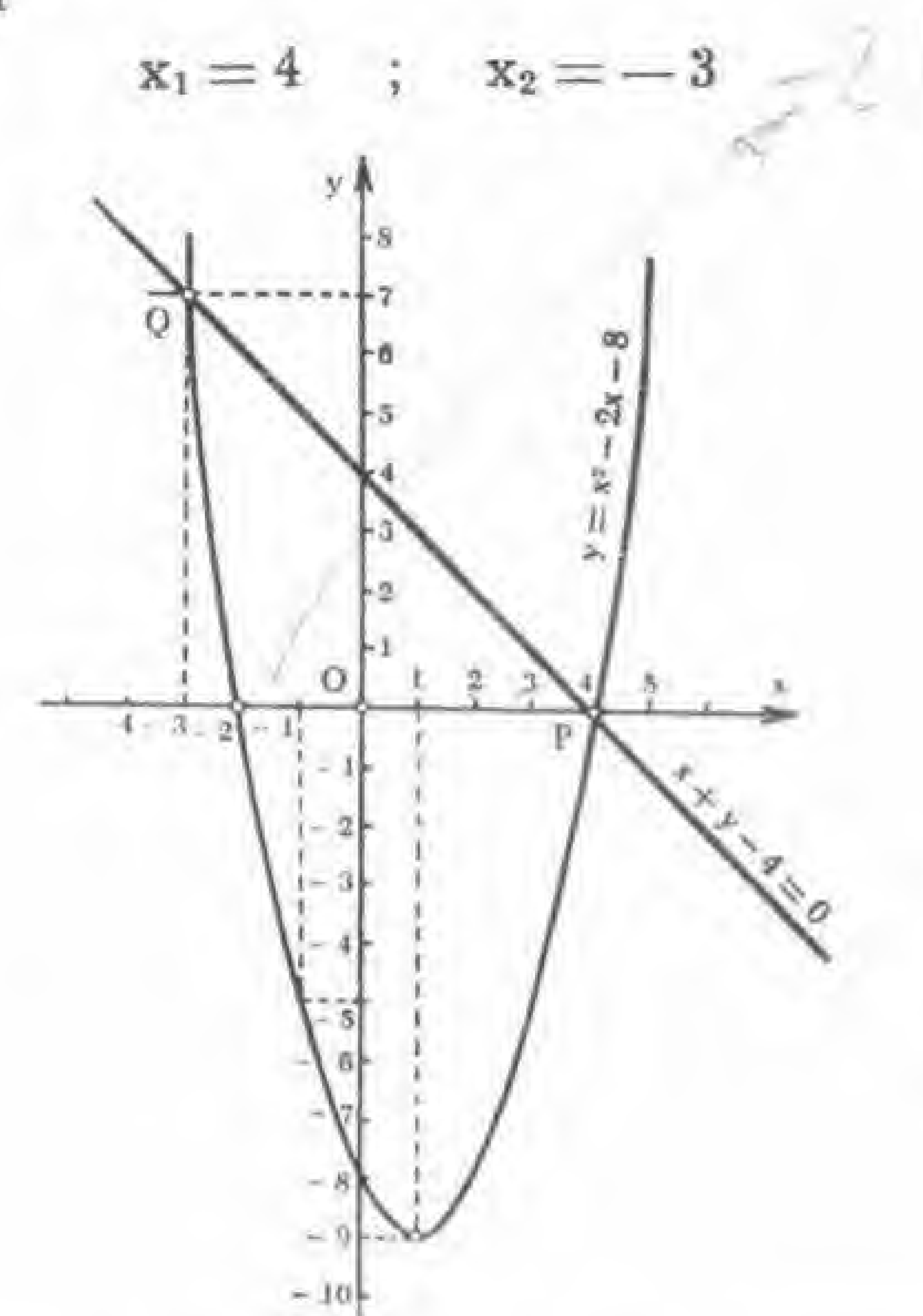
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \text{ (recta) (1)} \\ x^2 - 2x - 8 = y \text{ (parábola)} \end{cases}$$

resulta, aplicando el método de igualación que

$$x^2 - 2x - 8 = -x + 4$$

sus raíces son

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = -3$$



Reemplazando estos valores en (1), se obtiene

$$y_1 = 0 \quad ; \quad y_2 = 7$$

Luego, las coordenadas de los puntos P y Q de intersección, son

$$P\ (4; 0) \quad y \quad Q\ (-3; 7)$$

Ecuaciones de segundo grado. — El caso más conocido y que tiene una aplicación muy interesante es la intersección de una recta con la parábola más simple

$$y = x^2$$

por cuanto sirve para resolver gráficamente la ecuación de segundo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

En efecto, las dos soluciones de esta ecuación son las que cumplen con la igualdad

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

luego, son los puntos de intersección de la parábola

$$y = x^2 \qquad (1)$$

con la recta

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

Si se tiene dibujada sobre un papel milimetrado o cuadriculado la parábola (1), se pueden calcular las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado determinando la recta correspondiente en cada caso, y buscando los puntos de intersección.

Ejemplo:

Resolver gráficamente la ecuación de 2º grado

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son las que cumplen con el sistema

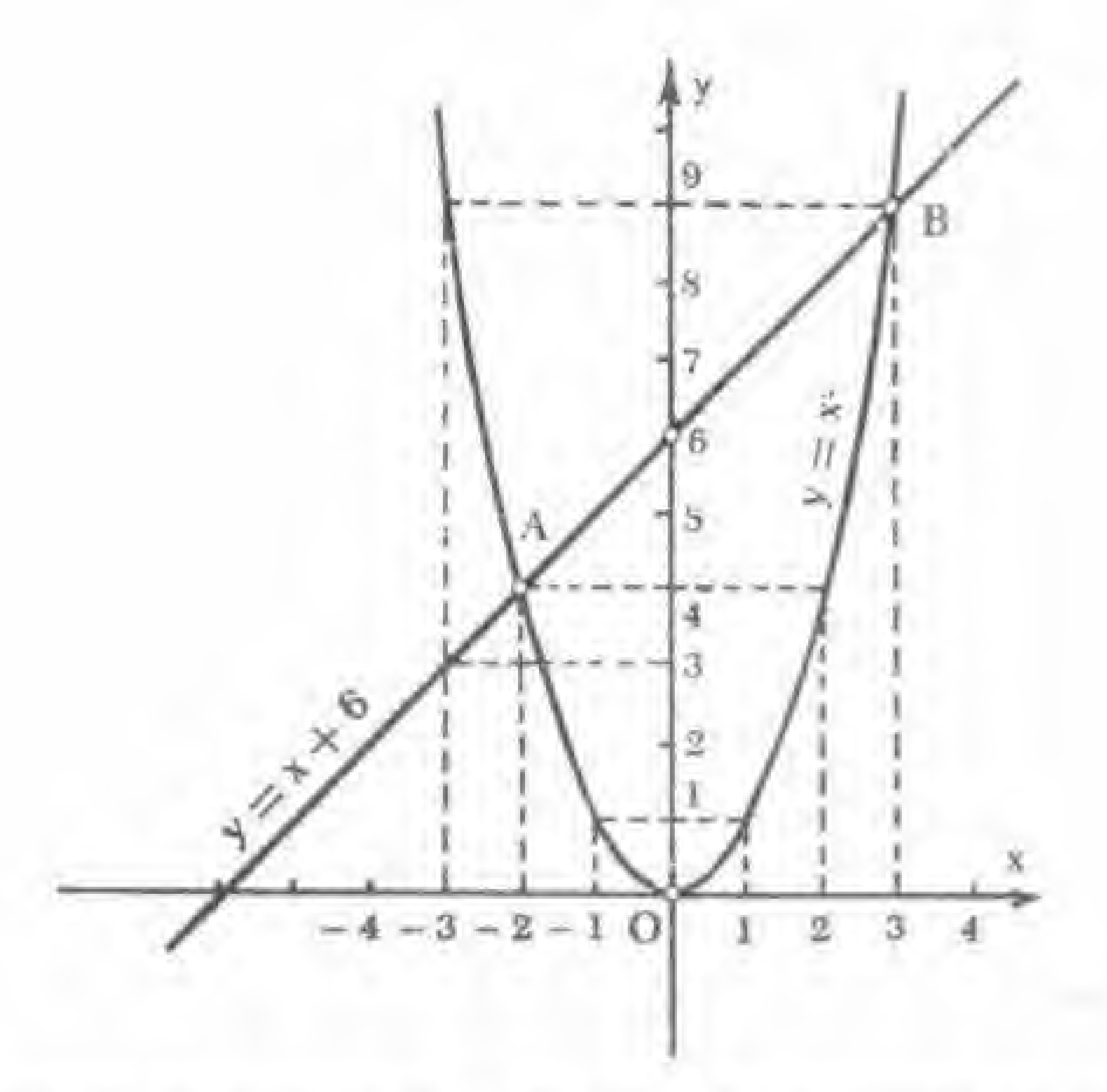
$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ y = x + 6 & (2) \end{cases}$$

Cuadro de valores de la ecuación (1):

x	0	1	2	3	−3	−2	−1
y	0	1	4	9	9	4	1

Cuadro de valores de la ecuación (2):

x	0	−3
y	6	3



Las raíces de la ecuación dada son, de acuerdo al gráfico,

$x_1 = -2 \qquad\qquad x_2 = 3$

EJERCICIOS

I) *Determinar las ecuaciones de la tangente y de la normal de la parábola:*

a) $y = x^2$ P (3, 9) R.: $\begin{cases} \dfrac{y-9}{x-3} = 6 & \text{(Ecuación tangente)} \\ \dfrac{x-3}{y-9} = -6 & \text{(Ecuación normal)} \end{cases}$

b) $y^2 = -8x$ P (−2, 4) R.: $\begin{cases} y = -x + 2 \text{ (t)} \\ y = x + 6 \text{ (n)} \end{cases}$

c) $y = 4x^2 - 5$ P (2, 11) R.: $\begin{cases} y = 16x - 21 \text{ (t)} \\ y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{89}{8} \text{ (n)} \end{cases}$

II) *Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta:*

a) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 = y \\ x + 4 = y \end{cases}$ R.: A (2, 6) B (−4, 0)

b) $\begin{cases} 4x^2 - 5 = y \\ x + 1 = y \end{cases}$ R.: A (1, 35/2, 35) B (−1, 1/−0, 1)

c) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = y \\ x + 2 = y \end{cases}$ R.: A (0, 5 ; 2, 75) B (−5, 5 ; −3, 5)

III) *Resolver gráficamente la ecuación de segundo grado:*

a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ R.: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ R.: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$

c) $x^2 - 4,3x + 1,2 = 0$ R.: $\begin{cases} x_1 = 0,3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

IV) *Determinar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen, cuyo eje es* (OX) *y que pasa por el punto* P (3 ; 4).

Téngase en cuenta que $y^2 = 2px$.

R.: $y^2 = \dfrac{16}{3}x$

V) *El mismo problema, pero el eje es* (OY).

Téngase en cuenta que $x^2 = 2py$

R.: $x^2 = \dfrac{9}{4}y$

VI) *Determinar la tangente a la parábola*

$$y^2 = 4\,x$$

en el punto de abscisa

a) 0 ; b) 1 ; c) 2

R.: a) $x = 0$
b) $y = x + 1$
c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

VII) *Determinar la tangente a la parábola* $y^2 = 9\,x$ *paralela a la recta*

$$y = 2\,x + 4$$

R.: $y = 2x + \dfrac{9}{8}$

VIII) *Dada la ecuación* $y = 5x^2 - 3x - 2$ *determinar:*

1) *Las constantes* (g) (h) (p).

2) *Ubicarlas gráficamente.*

R.: $g = 0,3 \; ; h = -2,45 \; ; p = 0,1$

IX) *Dada la ecuación* $y = \pm\sqrt{8\,(x + 2)}$ *esquematizar el gráfico.* Téngase en cuenta que $h = 0$, $g = -2$, $F \equiv 0$.

X) *Determinar la ecuación general de la parábola si* $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $h = 4$ *y* $g = 2$.

Las incógnitas son (a) (b) (c).

R.: $y = -\dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{16}{9}x + \dfrac{20}{9}$

XI) *Determinar las raíces de los siguientes sistemas:*

a) $\begin{cases} x^2 + 3\,x - 4 = y \\ x + 4 = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 4\,x - 5 = y \\ x + 2 = y \end{cases}$

R.: a) (2 ; 6) ; (—4 ; 0)
b) (1, 5 ; 3, 5) ; (—4, 5 ; —2, 5)

XII) *Determinar la ecuación de la parábola de eje* $x = 0$ *y vértice* **V** (0, 5) *que pasa por el punto* (10, —5).

R.: $y = -\dfrac{1}{10}x^2 + 5$

XIII) *Idem para* $x = 0$; **V** (0, 0) ; P (5, 10)

R.: $y = \dfrac{2}{5}x^2$

XIV) *Idem para* $x = 1$; **V** (1, 0) ; P (3, 4)

R.: $y = (x - 1)^2$

XV) *Idem para* $x = 5$; **V** (5, —1) ; P (—1, 2)

R.: $y = \dfrac{1}{12}(x - 5)^2 - 1$

XVI) *Localizar el vértice y el eje de la parábola* $x = 2y^2 - 4y$. *Graficar.*

Conviene completar el cuadrado en (y) *para determinar las coordenadas del vértice.*

R.: (—2, 1)

Eje: $y = 1$

XVII) *Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva* $y = 2x^2 - 5$ *en el punto* (1, —3).

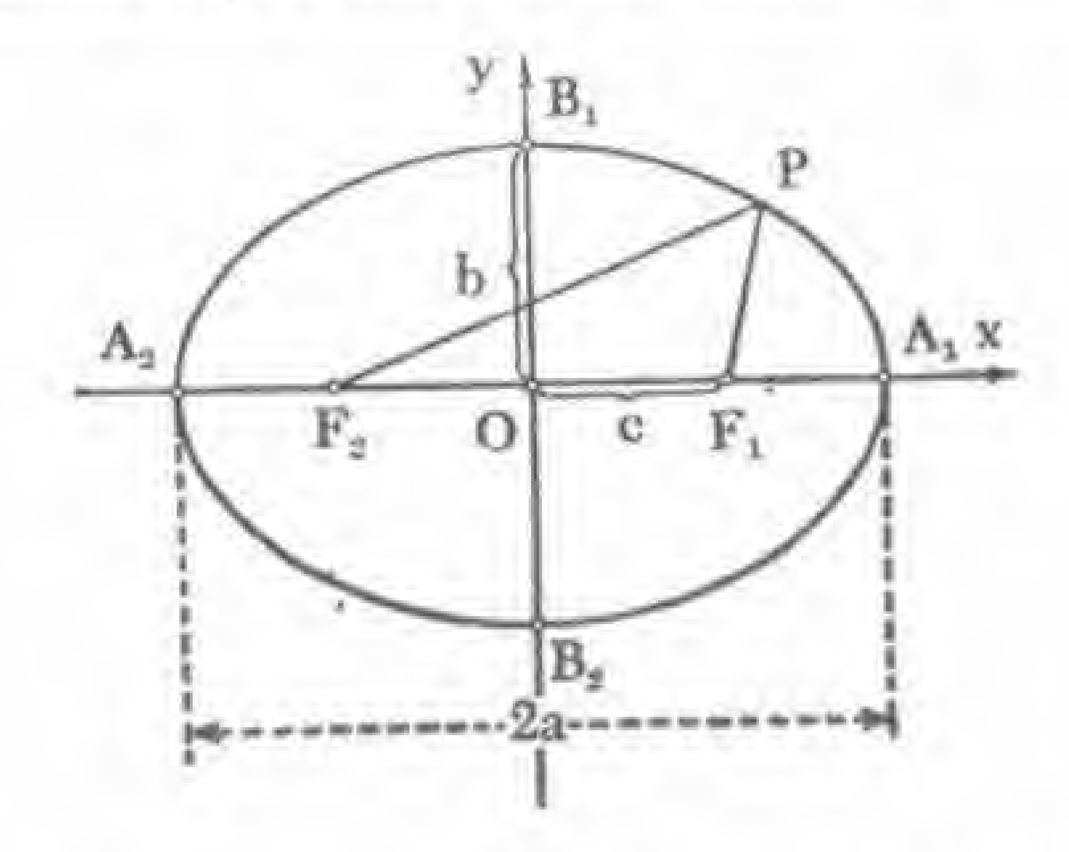
R.: $\begin{cases} t: \; 4x - y = 7 \\ n: \; x + 4y = -11 \end{cases}$

XVIII) *Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola* $y = x^2$; *que es paralela a la recta* $y = 4x$.

R.: $y = 4x - 4$

5 ESTUDIO DE LA ELIPSE

Elipse. *Definición.* — Se llama *elipse* al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo tiene un valor constante.



Los puntos fijos F_1 y F_2 se denominan *focos*. Las distancias de un punto cualquiera de la curva a los focos son los radios vectores del punto. Designando con (2 a) la suma constante de los radios vectores de un punto P de la elipse, se verifica

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2\,a$$

Elementos geométricos:

O = centro.
F_1 y F_2 focos.

A_1 y A_2; B_1 y B_2 vértices (puntos extremos).

$A_1\,A_2 = 2\,a$ (eje mayor).

(a) semieje mayor.

$\overline{B_1\,B_2} = 2\,b$ (eje menor).

(b) semieje menor.

$\overline{F_1\,F_2} = 2\,c$ distancia focal.

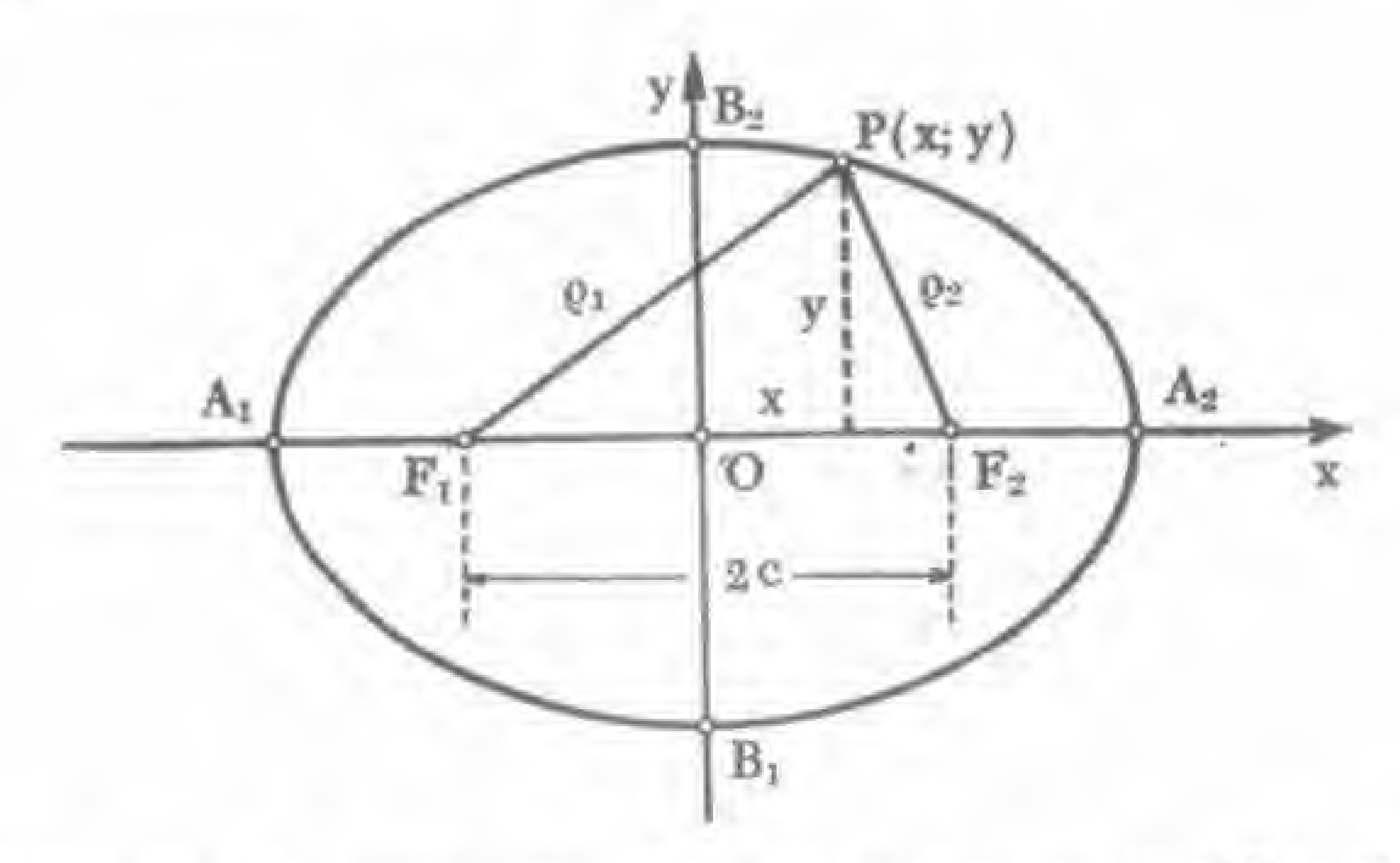
(c) semidistancia focal.

$\dfrac{\overline{F_1\,F_2}}{A_1A_2} = \dfrac{2\,c}{2\,a} = \dfrac{c}{a} =$ excentricidad.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

La circunferencia de radio (a) y con centro (O) se denomina circunferencia principal.

Ecuación canónica de la elipse. — Supongamos la elipse referida a un sistema de ejes cartesianos cuyo eje de abscisas coincida con el eje mayor de la curva, siendo el eje de ordenadas coincidente con el eje menor.



Por estar el punto P sobre la curva, se verificará

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2\,a \qquad (1)$$

y, además,

$$\varrho_1^2 = (c + x)^2 + y^2 \qquad (2)$$

$$\varrho_2^2 = (c - x)^2 + y^2 \qquad (3)$$

Restando miembro a miembro, resulta

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2$$

Desarrollando y reduciendo términos

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\ (\varrho_1 - \varrho_2) = 4\,c\,x$$

Recordando la igualdad (1), tendremos

$$2\,a\ (\varrho_1 - \varrho_2) = 4\,c\,x$$

luego

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2\,c\,x}{a} \qquad (4)$$

De las relaciones (1) y (4) se deducen por suma y resta, respectivamente, los valores de los radios vectores en función de la abscisa

$$\varrho_1 = a + \frac{c\,x}{a} \qquad (5)$$

$$\varrho_2 = a - \frac{c\,x}{a} \qquad (6)$$

Sustituyendo el valor de ϱ_1 en la (2), se obtiene

$$a^2 + 2\,c\,x + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2\,c\,x + c^2 + y^2$$

reduciendo términos

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + c^2 + y^2$$

eliminando el denominador

$$a^4 + c^2\,x^2 = a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2$$

o bien

$$a^4 - a^2\,c^2 = a^2\,x^2 - c^2\,x^2 + a^2\,y^2$$

Sacando factor común

$$a^2\ (a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)\ x^2 + a^2\,y^2$$

pero como

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (7)$$

resulta

$$a^2\,b^2 = b^2\,x^2 + a^2\,y^2$$

dividiendo toda la ecuación por $(a^2\,b^2)$ queda, en definitiva,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la ecuación canónica de la elipse.

Observación. — Para $c = 0$, resulta en (7)

$$b = a$$

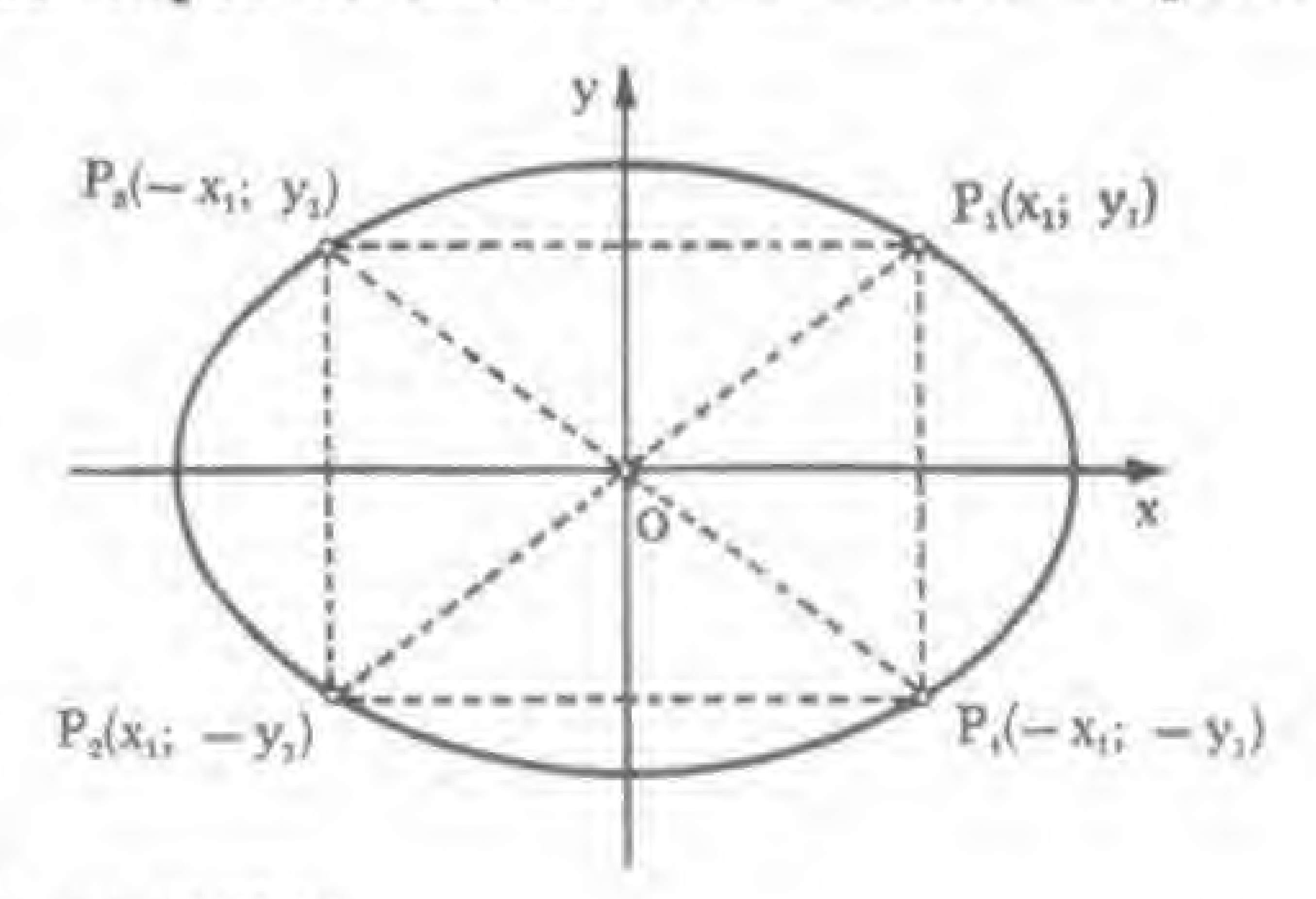
y la ecuación en cuestión se reduce a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que es la circunferencia principal de la elipse.

Discusión de la ecuación:

1º) La elipse es una curva simétrica respecto de sus



ejes y de su centro.

En efecto, siendo la ecuación de la curva

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

si se satisface para uno cualquiera de los cuatro pares de valores

$$(x_1\,;y_1) \quad ; \quad (x_1\,;-y_1)$$
$$(-x_1\,;y_1) \quad ; \quad (-x_1\,;-y_1)$$

se satisface para los tres pares respectivos restantes.

2º) La elipse se encuentra íntegramente situada en el rectángulo que se determina trazando por los extremos de cada diámetro perpendiculares al mismo.

En efecto, para los valores reales de las variables se verifica como consecuencia de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$$

luego

$$x^2\leqslant a^2$$

y de allí

$$|x|\leqslant a$$

es decir,

$$-a\leqslant x\leqslant a$$

Pero los puntos que satisfacen esta condición se encuentran en la faja comprendida entre las perpendiculares trazadas por A_1 y A_2 al eje mayor.

Considerando el segundo término del primer miembro de la ecuación tendríamos análogamente

$$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

de donde

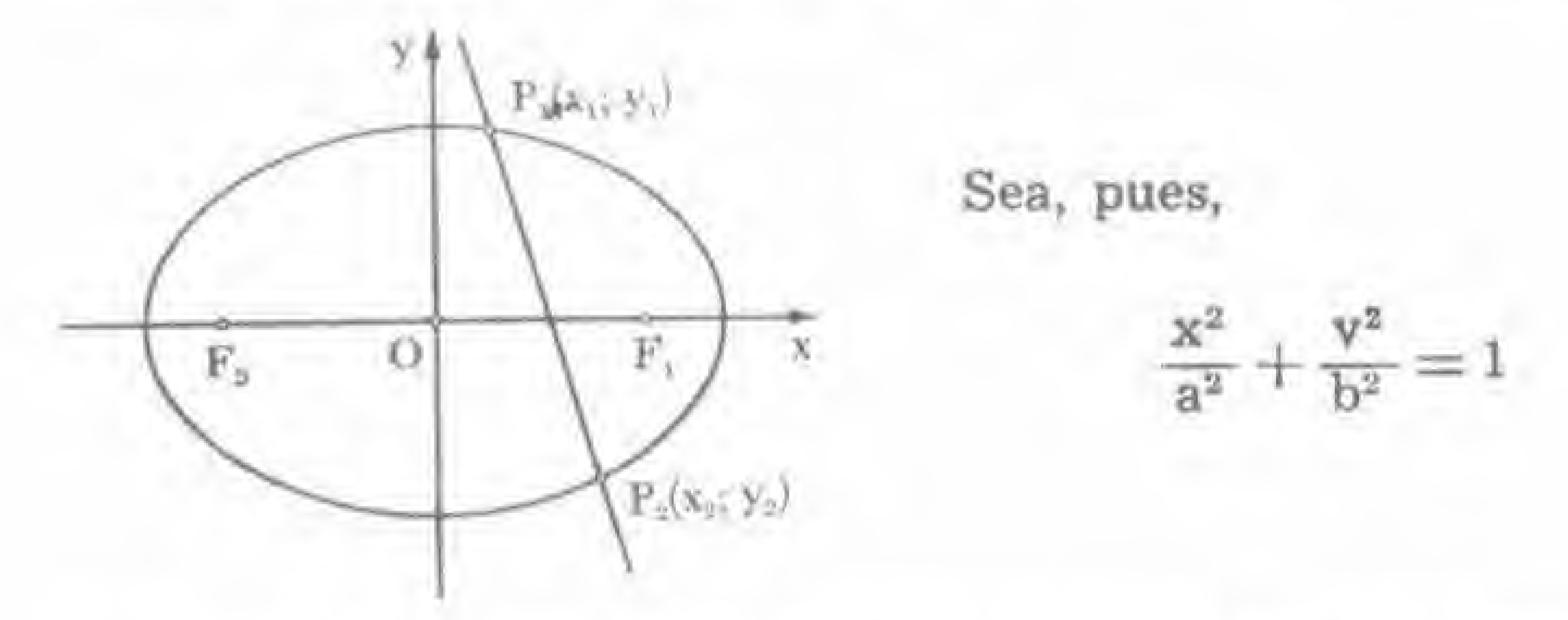
$$-b\leqslant y\leqslant b$$

Por lo tanto, la curva debe encontrarse en la faja comprendida entre las perpendiculares trazadas por B_1 y B_2 al eje menor.

De lo expuesto se deduce la proposición del enunciado.

Ecuación de la tangente a la elipse

Se llama *tangente* a una curva por un punto a la posición límite de una secante trazada por el mismo punto, cuando una segunda intersección de la misma con la curva viene a coincidir con el punto dado.



Sea, pues,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la ecuación de la elipse y $P_1\,(x_1\,;y_1)$ un punto tomado sobre la misma.

Para obtener la tangente comencemos por considerar un segundo punto $P_2\,(x_2\,;y_2)$ también sobre la elipse y tracemos la secante P_1P_2 cuya ecuación sería

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \qquad (1)$$

Si ahora hacemos tender $P_2\rightarrow P_1$ la secante considerada tenderá a la tangente buscada y coincidirá con ella cuando se verifique $P_2\equiv P_1$. Para obtener la ecuación de la tangente basta pasar al límite en la ecuación de la secante haciendo

$$x_2=x_1 \quad ; \quad y_2=y_1$$

Este pasaje no puede hacerse directamente en la ecuación escrita sin que resulte una *indeterminación* en el segundo miembro, la cual proviene de que en dicha ecuación no aparece expresado todavía que los puntos P_1 y P_2 están sobre la elipse.

Vamos, pues, a buscar una nueva expresión del segundo miembro de la ecuación de la secante en que aparezca dicha circunstancia.

Por estar P_1 y P_2 sobre la elipse se infiere

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

o bien

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

análogamente (2)

$$b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

Restando

$$b^2 (x_1^2 - x_2^2) + a^2 (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

$$b^2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2 (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

o también

$$a^2 (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = - b^2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

luego

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = - \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}$$

Con lo que la ecuación (1) de la secante se convierte en

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = - \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}$$

si ahora pasamos al *límite*, resulta

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

que es la *ecuación de la tangente*.

Prosiguiendo los cálculos se deduce

$$a^2 y_1 (y - y_1) = - b^2 x_1 (x - x_1)$$
$$b^2 x_1 (x - x_1) + a^2 y_1 (y - y_1) = 0$$

luego

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$$

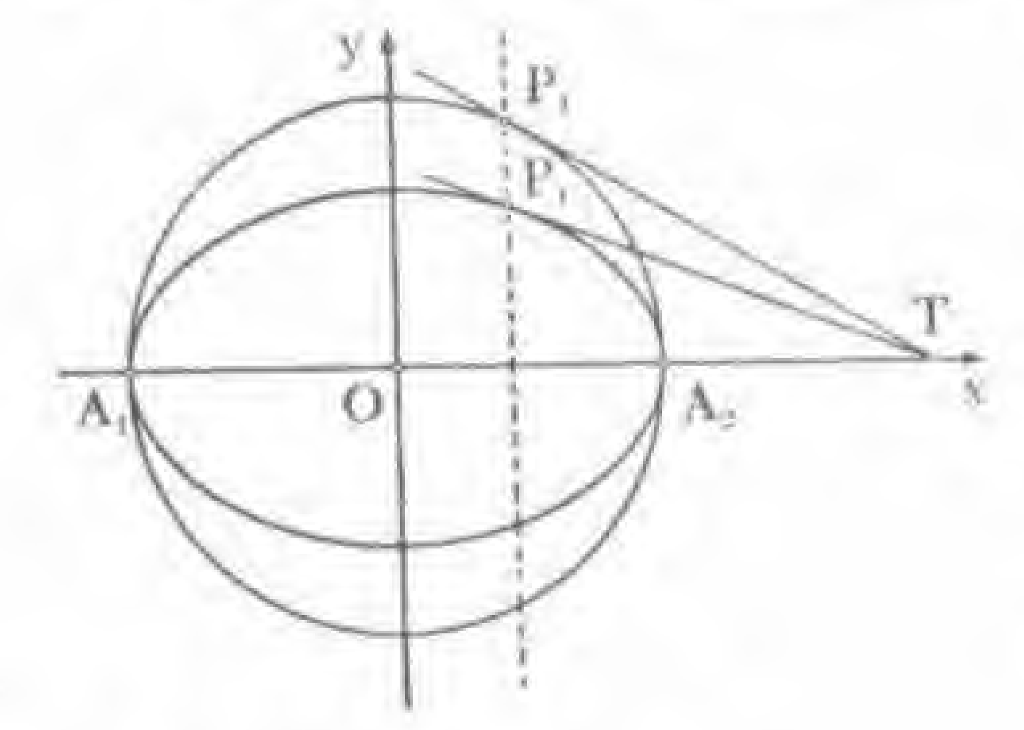
reemplazando el segundo miembro por su igual (2), resulta

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

y, en fin,

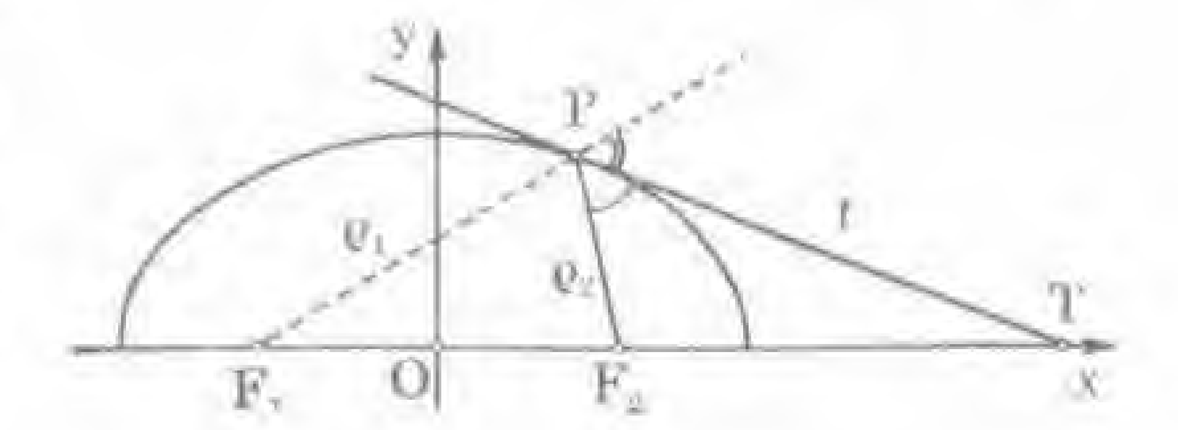
$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$$

que es la *ecuación desglosada de la tangente.*



Propiedades de la tangente. — 1) La tangente a la elipse y a su circunferencia principal en dos puntos correspondientes se cortan sobre un mismo punto (T) del eje mayor de la curva.

2) La tangente a la elipse por un punto es bisectriz del ángulo exterior formado por los radios vectores del mismo punto.



Ejercicios

1) *Determinar la ecuación de la tangente a la elipse*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

en un punto P_1 de abscisa 3 y ordenada positiva.

Determinación de la ordenada de P:

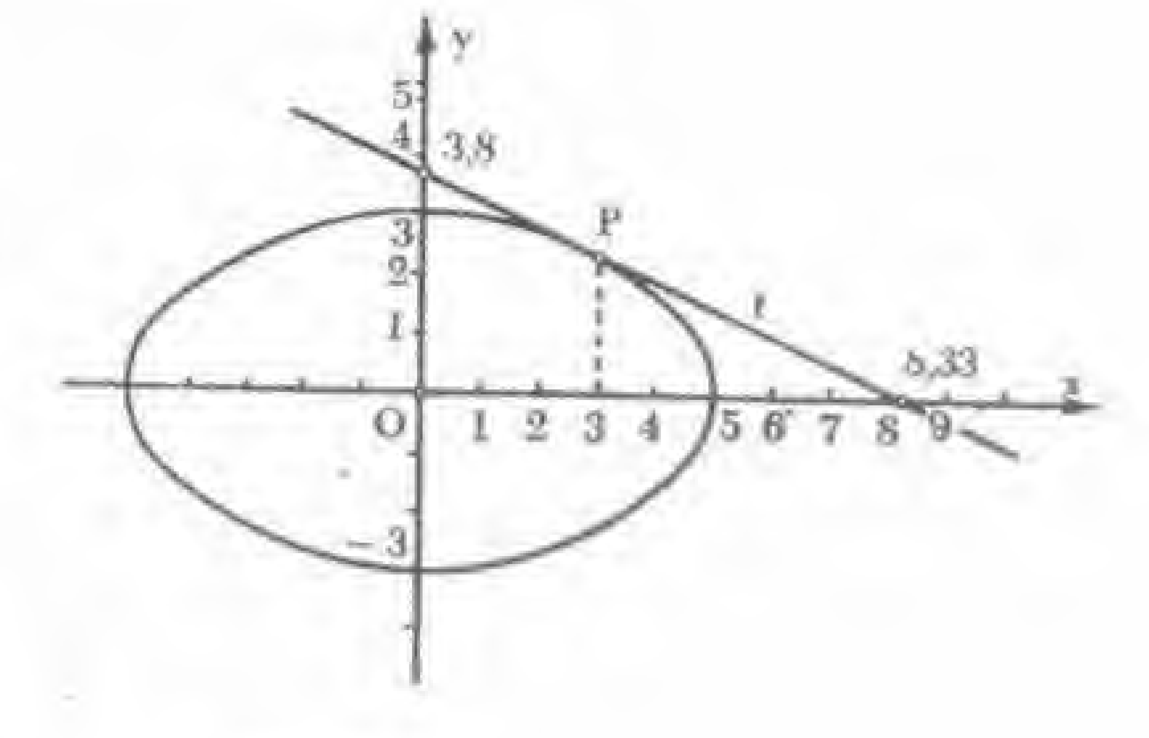
$$\frac{3^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

luego

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{16}{25}$$

$$y^2 = \frac{16}{25} \cdot 9$$



$$y = \pm \sqrt{\frac{16}{25} \cdot 9}$$

$$y = \pm \frac{12}{5} = \pm 2,4$$

Luego las coordenadas del punto P son (3 ; 2, 4).

Ecuación de la tangente

$$\boxed{\frac{3x}{25} + \frac{2,4y}{9} = 1}$$

La ecuación *segmentaria* de la tangente es

$$\frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{\frac{9}{2,4}} = 1$$

o bien

$$\boxed{\frac{x}{8,33} + \frac{y}{3,75} = 1}$$

II) *Determinar la ecuación de la tangente a la elipse*

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$$

en un punto de ordenada 4 y abscisa positiva.

R.: P (4, 8 ; 4)

$$\frac{4,8x}{64} + \frac{4y}{25} = 1$$

III) ***Determinar la ecuación segmentaria de la tangente del problema II.***

R.: $\frac{x}{13,33} + \frac{y}{6,25} = 1$

IV) ***Determinar la ecuación de la elipse de centro coincidente con el origen, que tiene como ejes los ejes de coordenadas y pasa por los puntos:***

A (2 ; 3) B $\left[1 ; \frac{3\sqrt{5}}{}\right]$

R.: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

V) *Determinar la ecuación de la tangente a la elipse:*

a) $2x^2 + 4y^2 = 38$ *en el punto* P (1 ; 3).

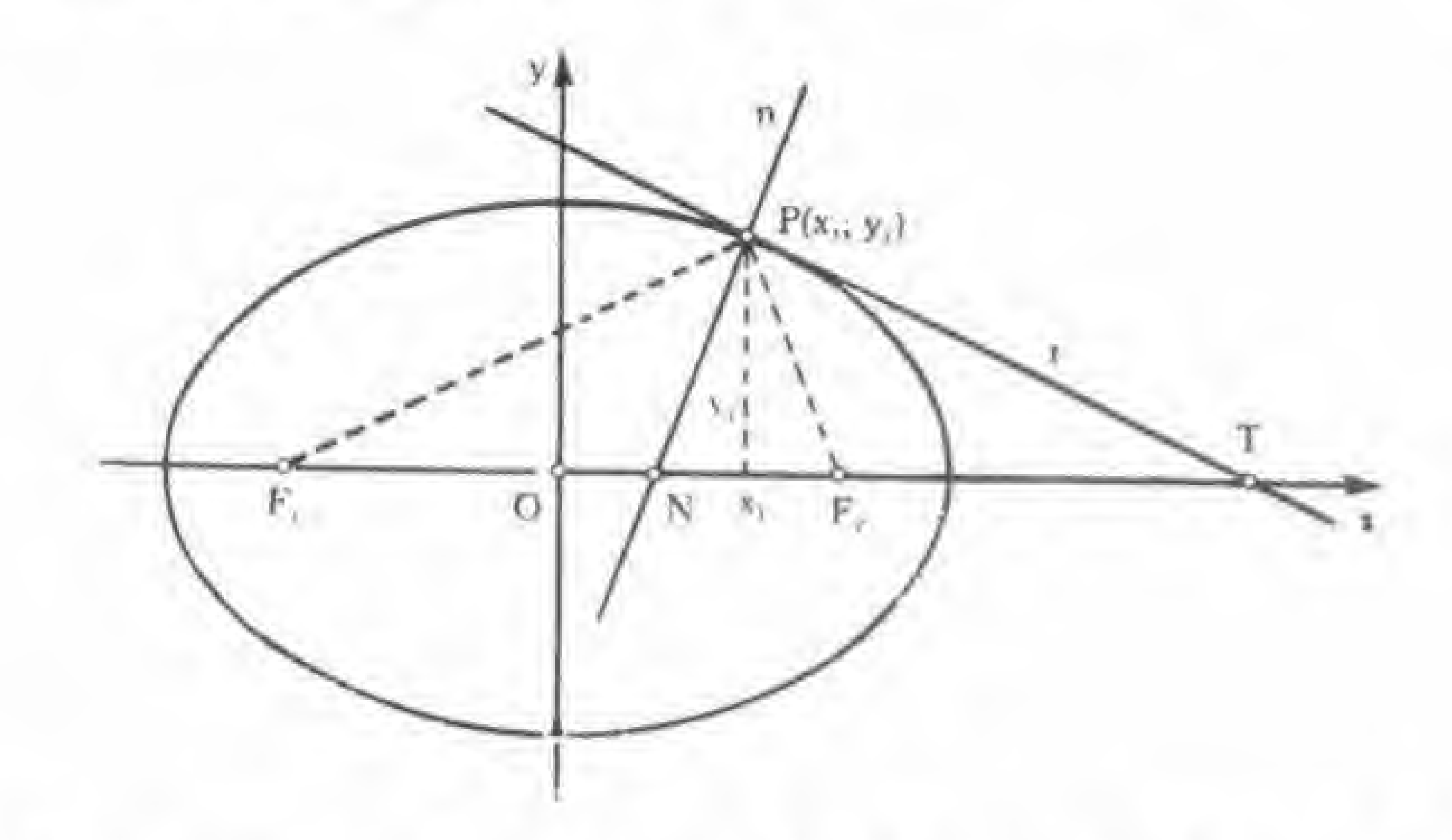
R.: $\frac{x}{19} + \frac{6y}{19} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ *en el punto* P (2 ; 0).

R.: $x = 2$

Ecuación de la normal a la elipse

Se llama *normal* (n) a la elipse en uno de sus puntos a la recta de su plano, que pasa por ese punto y es perpendicular a la tangente trazada por él.



Para determinar la ecuación de la *normal* a la elipse en el punto P $(x_1 ; y_1)$ se debe partir de la ecuación de la tangente:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

en su forma explícita se tiene

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

cuyo coeficiente angular es $\left(\frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}\right)$

Ahora bien, como la normal debe pasar por el punto P $(x_1 ; y_1)$, su ecuación será de la forma

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

y como su coeficiente angular (m) deberá ser el número recíproco del coeficiente angular de la tangente con signo contrario, o sea

$$m = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

por lo tanto la ecuación de la normal es

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Eliminando el denominador

$$b^2 x_1 y - b^2 x_1 y_1 = a^2 y_1 x - a^2 x_1 y_1$$

o bien, transportando términos

$$a^2 x_1 y_1 - b^2 x_1 y_1 = a^2 y_1 x - b^2 x_1 y$$

sacando $(x_1 y_1)$ factor común

$$(a^2 - b^2)\, x_1 y_1 = a^2 y_1 x - b^2 x_1 y$$

Dividiendo por $(x_1 y_1)$

$$a^2 - b^2 = \frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1}$$

y como

$$a^2 - b^2 = c^2$$

resulta

$$\boxed{\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = c^2}$$

la ecuación de la normal buscada.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la normal a la elipse en un punto

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad P\left(1 \; ; \; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

Solución:

La ecuación de la normal es:

$$\frac{16\,x}{1} - \frac{4\,y}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = 12 \qquad \text{por ser } a^2 - b^2 = c^2$$

$$16\,x - \frac{8}{\sqrt{15}}\,y = 12$$

racionalizando el 2º término

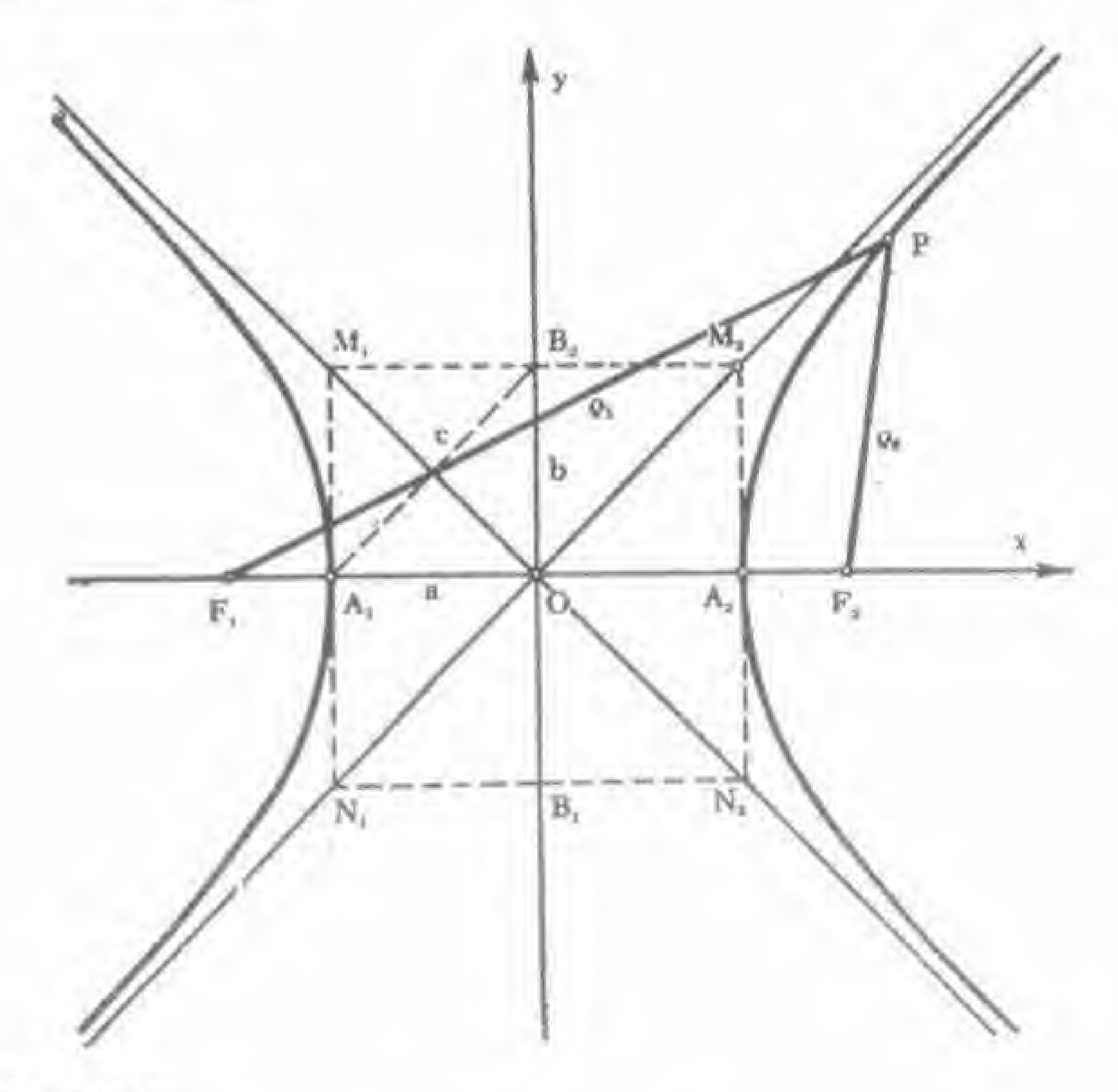
$$16\,x - \frac{8\sqrt{15}}{15}\,y = 12$$

o bien

$$240\,x - 8\sqrt{15}\,y = 180$$

ESTUDIO DE LA HIPERBOLA 6

Hipérbola. *Definición.* — Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo tiene un valor constante.



Es decir:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \pm\, 2\,a$$

Elementos geométricos. — Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman *focos* de la curva.

La recta determinada por ellos $F_1 F_2$ será el *eje transverso.*

La distancia que los separa $\overline{F_1 F_2} = 2c$ se denomina *distancia focal*

$\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ radios vectores.

Considerando el triángulo $PF_1 F_2$, se verifica

$$\overline{F_1 F_2} > | \overline{F_1 P} - \overline{F_2 P} |$$

porque un lado es mayor que la diferencia de los otros dos.

Por lo tanto,

$$2c > 2a$$

o bien

$$c > a$$

luego

$$\frac{c}{a} > 1$$

El cociente $\left(\frac{c}{a}\right)$ se llama *excentricidad* de la curva y caracteriza a ésta desde el punto de vista de la forma.

El punto (O) medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$ es el *centro* de la curva y la perpendicular trazada por el mismo al eje transverso recibe el nombre de *eje no transverso.*

Tomando sobre el eje transverso, a ambos lados del centro, segmentos $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a$ se obtienen los puntos A_1 y A_2 llamados vértices de la curva y el segmento $\overline{A_1 A_2} = 2a$ será el *diámetro transverso* de la misma.

Haciendo centro en un vértice, si describimos una circunferencia de radio (c), ésta cortará al eje no transverso en dos puntos B_1 y B_2 y el segmento $\overline{B_1 B_2} = 2b$ recibe el nombre de *diámetro no transverso.*

Considerando el triángulo rectángulo $OA_1 B_2$, se deduce

$$a^2 + b^2 = c^2$$

esta igualdad liga los diámetros y la distancia focal.

Un círculo con centro en un foco y radio (2 a) será el *círculo director* correspondiente a dicho foco.

La circunferencia de radio (a) y con centro (O) se llama *circunferencia principal.*

Las diagonales del rectángulo obtenido trazando paralelas por los extremos del diámetro transverso al no transverso y viceversa, reciben el nombre de *asíntotas* de la curva.

Ecuación canónica de la hipérbola

Si consideramos como ejes coordenados los ejes de la curva, los focos tendrían por coordenadas

$$F_1\ (-c\,;0) \qquad F_2\ (c\,;0)$$

Eligiendo arbitrariamente un punto cualquiera P (x ; y) sobre la curva se verificará por definición de la misma

$$\rho_1 - \rho_2 = \pm 2a \qquad (1)$$

Pero en $F_1 \hat{P'} P$

$$\rho_1^2 = (x + c)^2 + y^2 \qquad (2)$$

y en $F_2 \hat{P'} P$

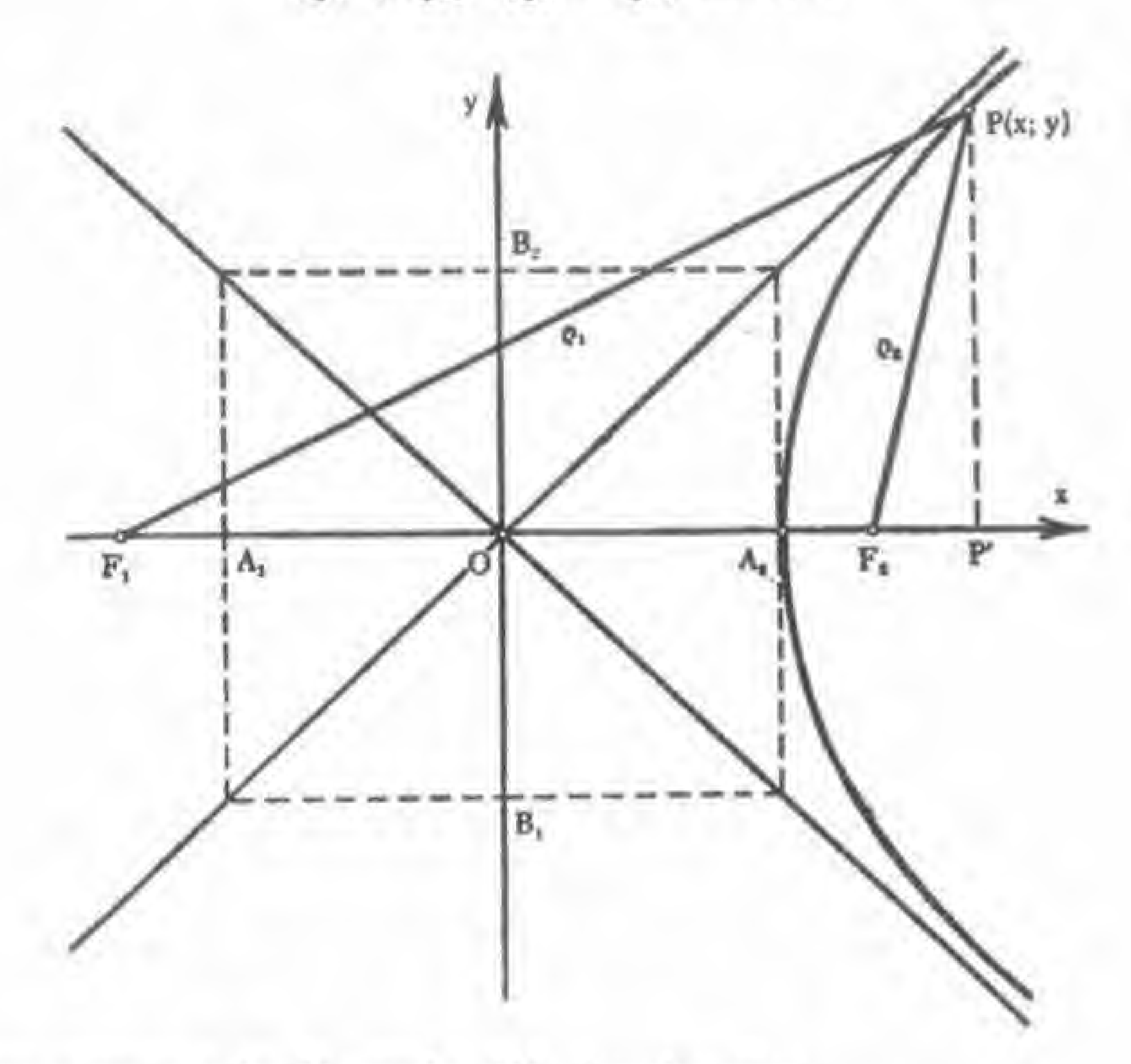
$$\rho_2^2 = (x - c)^2 + y^2 \qquad (3)$$

restando miembro a miembro

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (x + c)^2 - (x - c)^2$$

o bien, desarrollando y reduciendo términos

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\ (\varrho_1 - \varrho_2) = 4\,c\,x$$



pero atento a la fórmula (1), tendremos

$$\pm\, 2\,a\ (\varrho_1 + \varrho_2) = 4\,c\,x$$

luego

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \pm\,\frac{2\,c\,x}{a} \qquad (4)$$

De (1) y (4) se infieren por suma y resta, respectivamente, los valores de los radios vectores en función de la abscisa:

$$(5) \qquad \varrho_1 = \pm \left(\frac{c\,x}{a} + a\right) \qquad \varrho_2 = \pm \left(\frac{c\,x}{a} - a\right) \qquad (6)$$

Debiendo adoptarse en ambas fórmulas el signo más o menos, segun que (x) sea positivo o negativo, de conformidad con la fórmula (4), de la cual se deducen.

Reemplazando, por ejemplo, en la (2) el valor de (ϱ_1), se obtiene

$$\frac{c^2\,x^2}{a^2} + 2\,c\,x + a^2 = x^2 + 2\,c\,x + c^2 + y^2$$

y de allí sucesivamente

$$c^2\,x^2 + a^4 = a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2$$

$$c^2\,x^2 - a^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)\ x^2 - a^2\,y^2 = a^2\ (c^2 - a^2)$$

y recordando que

$$c^2 - a^2 = b^2$$

resulta

$$b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$$

dividiendo por $(a^2\,b^2)$ se obtiene, en definitiva,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la *ecuación canónica* de la *hipérbola*.

Se advierte que los parámetros (a) y (b) no están ligados en este caso por ninguna relación necesaria de desigualdad, pudiendo ser

$$a \gtreqless b$$

Hipérbola equilátera

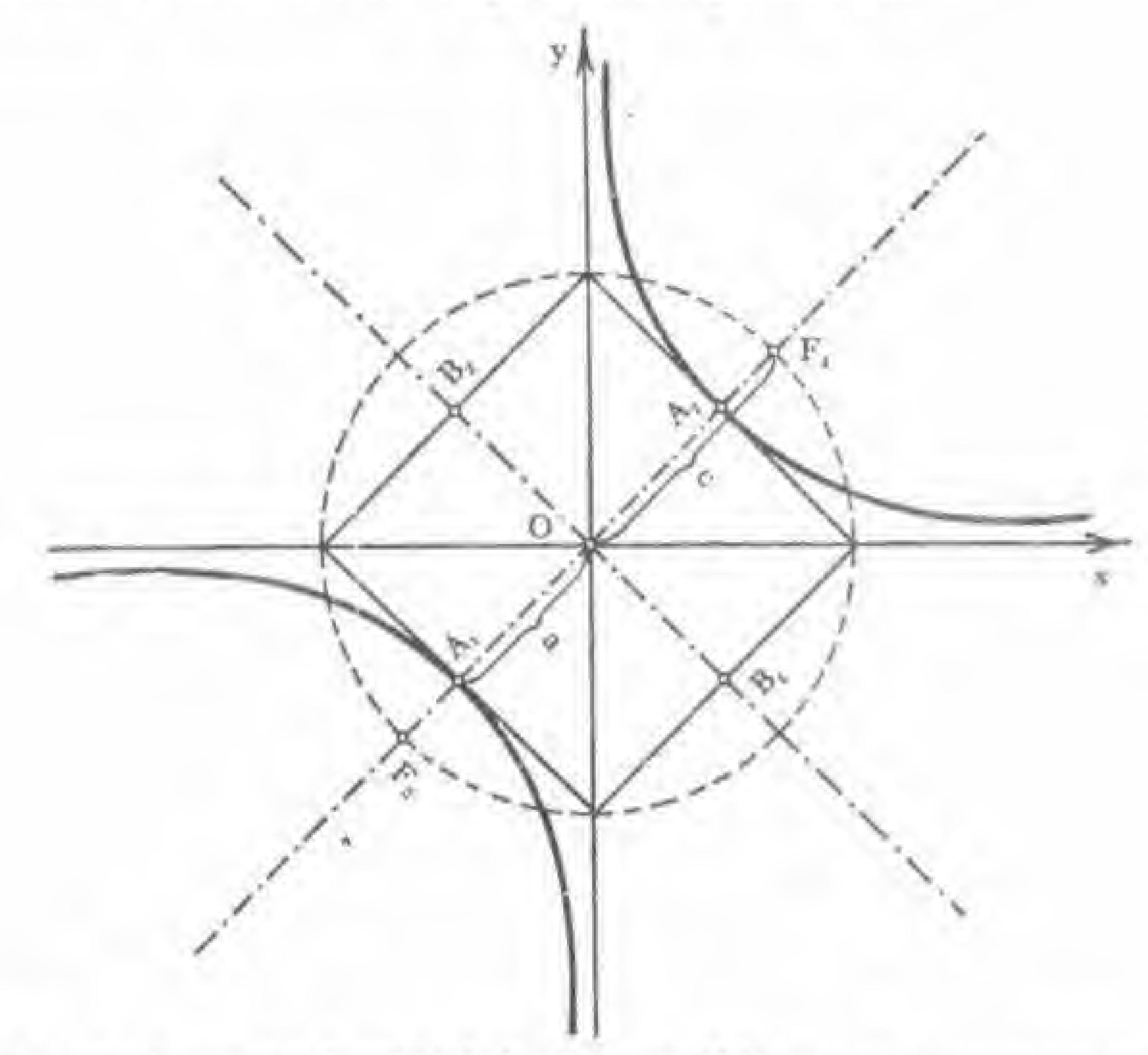
En el caso particular que

$$a = b$$

la ecuación de la hipérbola se reduce a

$$x^2 - y^2 = a^2$$

tomando el nombre de hipérbola *equilátera.*



Tratándose de la hipérbola *equilátera* se toman generalmente las asíntotas como ejes coordenados y, en consecuencia, la ecuación será:

$$\boxed{x \cdot y = k} \qquad \text{siendo } k = \frac{a^2}{2}$$

Este tipo de función tiene aplicación importante en Economía, relacionando la cantidad de artículos vendidos y el precio de venta. Se estima que *al aumentar el precio, la demanda disminuye,* siempre que el precio unitario y el número total de unidades vendidas (que es el ingreso total) sea una constante. El economista se refiere a esto como la *elasticidad unitaria de la demanda.*

Propiedades de la hipérbola. — Pueden comprobarse las siguientes propiedades:

1º La hipérbola es una curva simétrica respecto de sus ejes y de su centro.

2º La hipérbola no tiene ningún punto real en el interior de la faja determinada trazando paralelas al eje no transverso por los extremos del diámetro transverso.

Además con respecto a los mismos ejes las ecuaciones de las *asíntotas* a la curva serán:

$$y = \frac{b}{a} x \qquad y = -\frac{b}{a} x$$

En la hipérbola equilátera, las respectivas ecuaciones de las asíntotas son

$$y = x \qquad y = -x$$

evidenciando así que son las bisectrices de los ejes de la curva y son perpendiculares entre sí.

Ecuación de la tangente

Se llama *tangente a una hipérbola* en uno de sus puntos a la recta de su plano, no paralela a una de sus asíntotas, que tiene ese solo punto común con ella.

Sea la ecuación de la curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y escrita de otra forma es

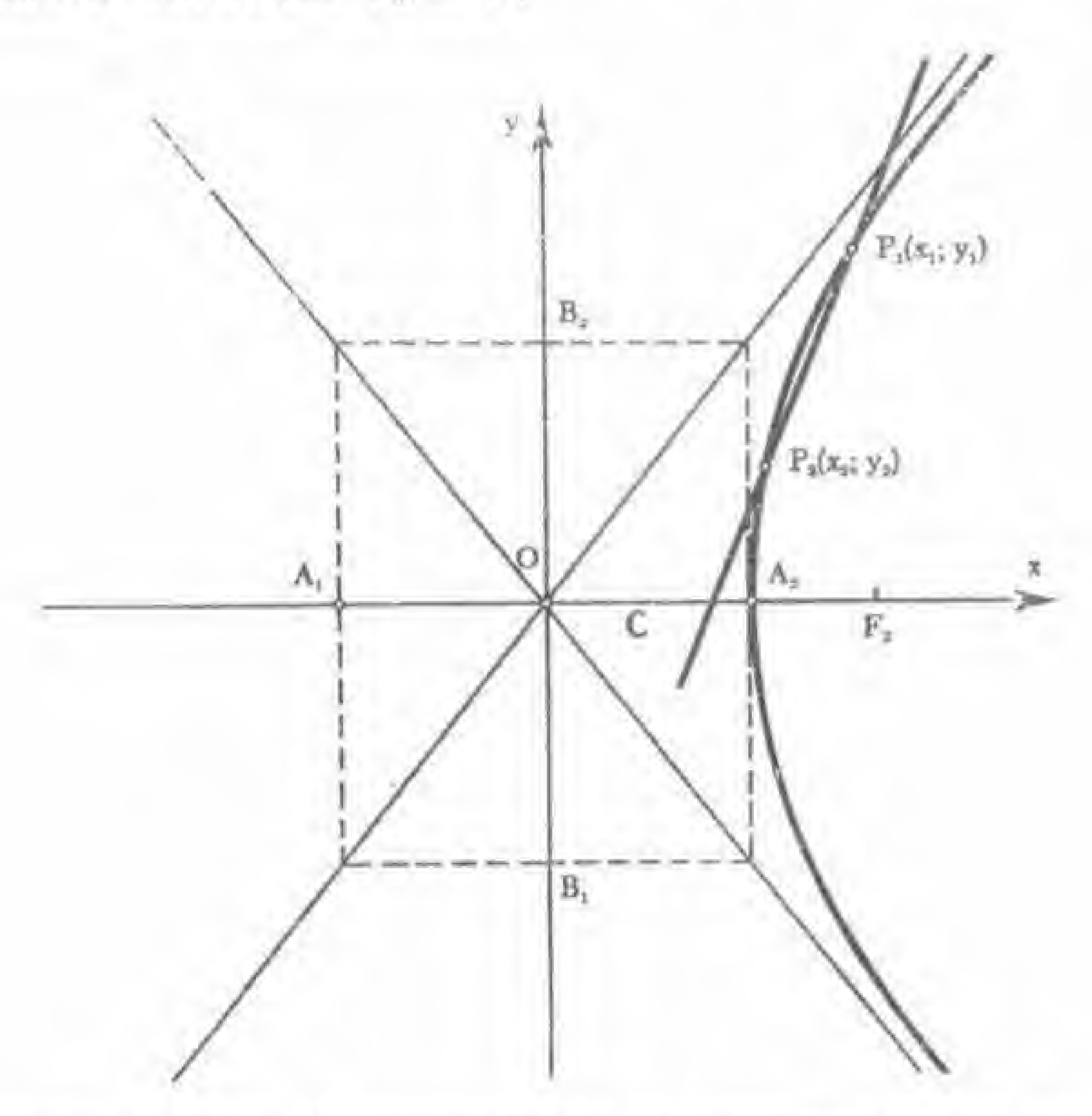
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

y un punto $P_1 (x_1 ; y_1)$ tomado sobre aquélla.

Para obtener la tangente comencemos por considerar un segundo punto $P_2 (x_2 ; y_2)$ también sobre la hipérbola y tracemos la secante $P_1 P_2$ cuya ecuación será:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (1)$$

Si ahora hiciésemos tender $P_2 \to P_1$ la secante de referencia tendería a la tangente buscada y coincidiría con ella cuando se verificase $P_2 \equiv P_1$.



Para obtener la ecuación de la tangente basta pasar al límite en la ecuación (1), haciendo

$$x_2 = x_1 \qquad\qquad y_2 = y_1$$

Este pasaje no puede hacerse directamente en la ecuación de la secante sin que resulte una *indeterminación* en el segundo miembro, la cual proviene de que en dicha ecuación no aparece expresado todavía que los puntos P_1 y P_2 están sobre la hipérbola.

Para hallar una nueva expresión del segundo miembro de la ecuación (1), pero que se ajuste a lo expuesto debemos tener presente que, por estar P_1 y P_2 sobre la curva, se deduce

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \qquad (2)$$
$$b^2 x_2^2 - a^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

restando miembro a miembro, se tiene

$$b^2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - a^2 (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$$

luego

$$a^2 (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = b^2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}$$

y comparando con (1), resulta

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}$$

y si ahora pasamos al *límite*, resulta la ecuación *determinada*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

que es la *ecuación de la tangente*.

Prosiguiendo los cálculos, para obtener una fórmula muy semejante a la ecuación de la curva, tendremos

$$b^2 x_1 (x - x_1) = a^2 y_1 (y - y_1)$$

y sucesivamente

$$b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 = a^2 y_1 y - a^2 y_1^2$$
$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2$$

luego por (2)

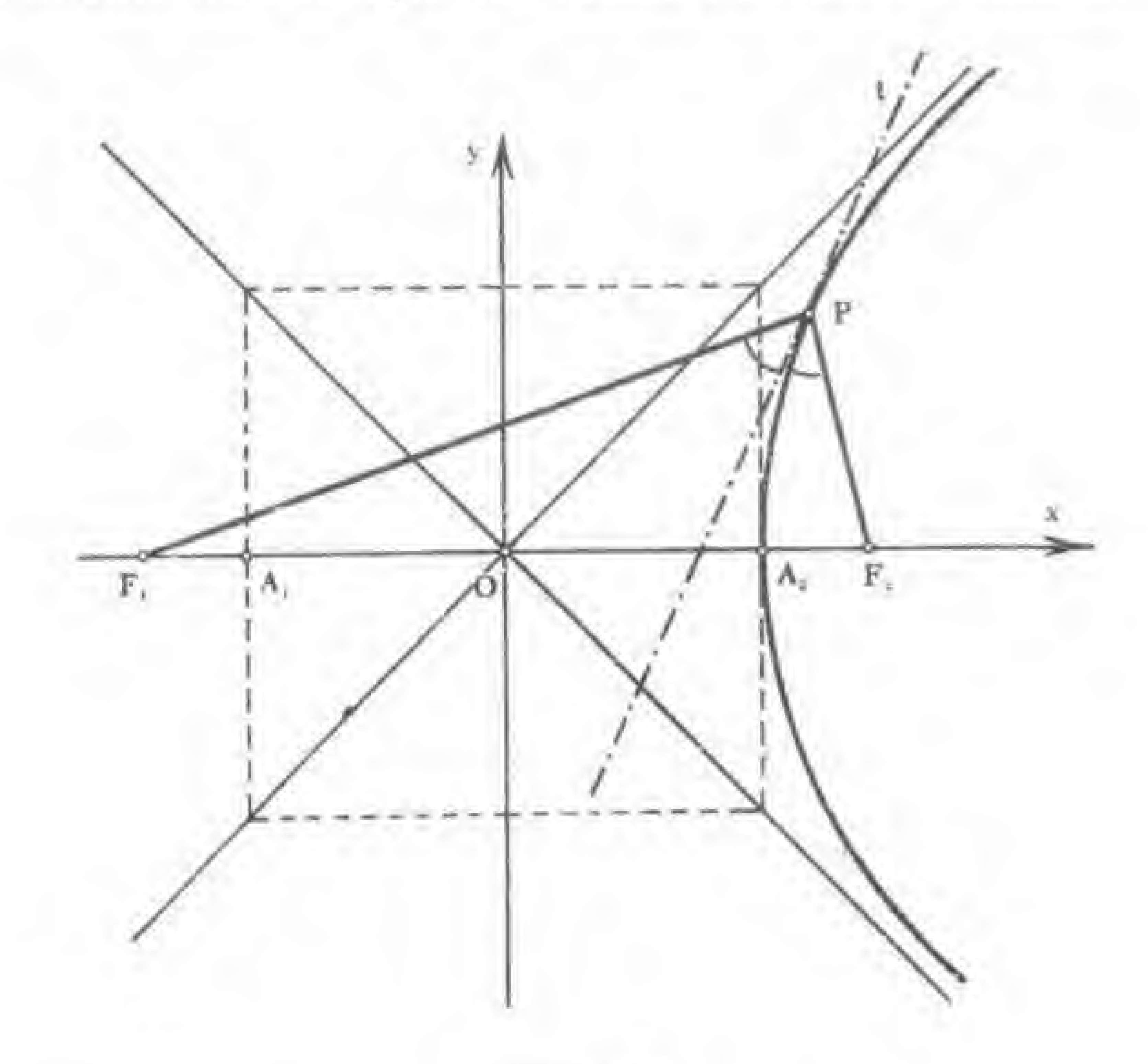
$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

y en fin la *ecuación sintética de la tangente*

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$$

Propiedad de la tangente:

La tangente a la hipérbola en un punto es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del mismo.



Ejercicio

Determinar la ecuación de la tangente a la hipérbola.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

en el punto de abscisa 8 y ordenada positiva.

Ordenada de P:

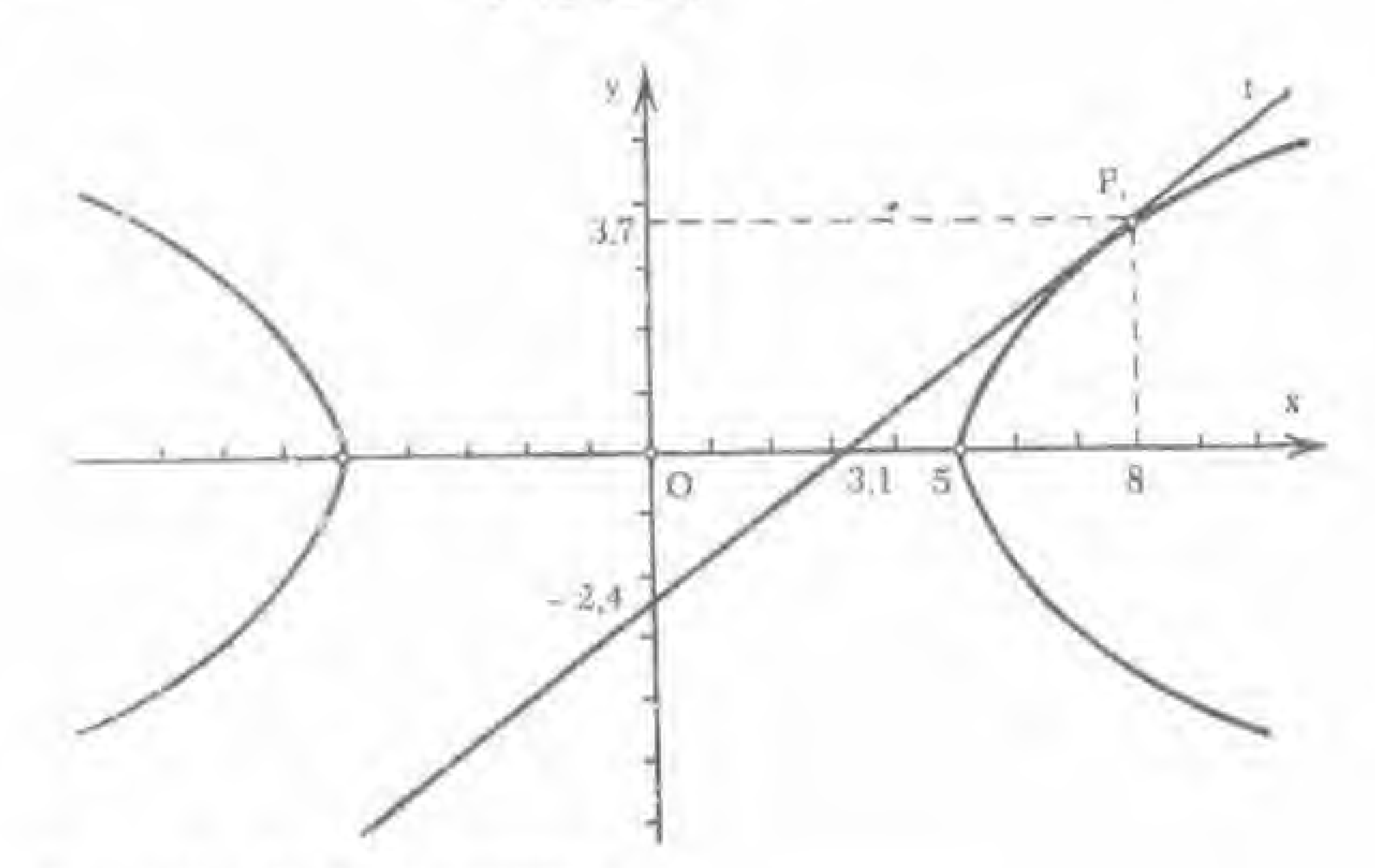
$$\frac{8^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{64}{25} - 1 = \frac{y^2}{9}$$

$$y = 3,7$$

luego

$$P\,(8\,;\,3,7)$$



Ecuación de la tangente.

$$\frac{8\,x}{25} - \frac{3,7\,y}{9} = 1$$

Ecuación de la normal a la hipérbola

Se llama *normal a una hipérbola* en uno de sus puntos a la recta de su plano que pasa por dicho punto y es perpendicular a la tangente en él.

La ecuación de la normal a la hipérbola es un punto $P_1\,(x_1\,;\,y_1)$ puede ser escrita teniendo en cuenta la relación que existe entre los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares.

O sea

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}$$

es la *ecuación de la normal*

Ejercicios

1) *Determinar la ecuación de la tangente a la hipérbola:*

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{100} = 1$ $\quad$ P $(5\,;+y)$ $\qquad$ R.: $\begin{cases} y = 13,3 \\ \frac{5x}{9} - \frac{13,3\,y}{100} = 1 \end{cases}$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad$ P $(-6\,;-y)$ $\qquad$ R.: $\begin{cases} y = -11,3 \\ \frac{-6x}{4} + \frac{11,3\,y}{16} = 1 \end{cases}$

c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ $\quad$ P $(-8\,;+y)$ $\qquad$ R.: $\begin{cases} y = 8,6 \\ \frac{-8x}{16} - \frac{8,6\,y}{25} = 1 \end{cases}$

d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad$ P $(-5\,;+2,25)$

R.: $5x + 4y + 16 = 0$

2) *Determinar la ecuación de la normal a la hipérbola, para los casos anteriores.*

a) R.: $\frac{y - 13,3}{x - 5} = -\frac{119,7}{500}$

b) R.: $\frac{y + 11,3}{x + 6} = -\frac{45,2}{96}$

c) R.: $\frac{y - 8,6}{x + 8} = \frac{137,6}{200}$

d) R.: $\frac{y - 2,25}{x + 5} = +\frac{4}{5}$

3) *Determinar gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las hipérbolas y circunferencias siguientes:*

a) $\begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

R.: $(\sqrt{8}\,;\sqrt{8})$; $(\sqrt{8}\,;\sqrt{8})$

$(-\sqrt{8}\,;-\sqrt{8})$, $(-\sqrt{8}\,;-\sqrt{8})$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

R.: $(3,9\,;3,2)$; $(3,9\,;-3,2)$
$(-3,9\,;3,2)$; $(-3,9\,;-3,2)$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x \cdot y = 14 \end{cases}$

R.: $(5,41\,;2,59)$; $(2,59\,;5,41)$
$(-2,59\,;-5,41)$; $(-5,41\,;-2,59)$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

R.: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

Representar gráficamente los resultados.

4) *Escribir la ecuación de una hipérbola siendo 12 el eje transverso y 16 la distancia de los focos.*

R.: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$

5) *Determinar la ecuación de la tangente a la hipérbola:*

a) $4x^2 - 9y^2 = 36$; P (4 ; ordenada positiva).

R.: $8x - 3\sqrt{7}\,.\,y = 18$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; P (5 ; ordenada positiva)

R.: $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$

6) *Dada la circunferencia* $x^2 + y^2 = 25$, *calcular el valor de la constante* C, *de tal forma que la hipérbola equilátera* $x \cdot y = C$ *resulte tangente a la circunferencia dada. Graficar los resultados.*

Conviene resolver el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = C \end{cases}$

La ecuación resultante es bicuadrada y se debe igualar a 0 el discriminante para obtener el valor de C.

R.: $C = \frac{25}{2}$

7) *Determinar las coordenadas de los puntos de tangencia del sistema anterior.*

Téngase en cuenta que el discriminante es nulo.

R.: $x_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

8) *Determinar gráfica y analíticamente las coordenadas de los puntos de intersección de los sistemas:*

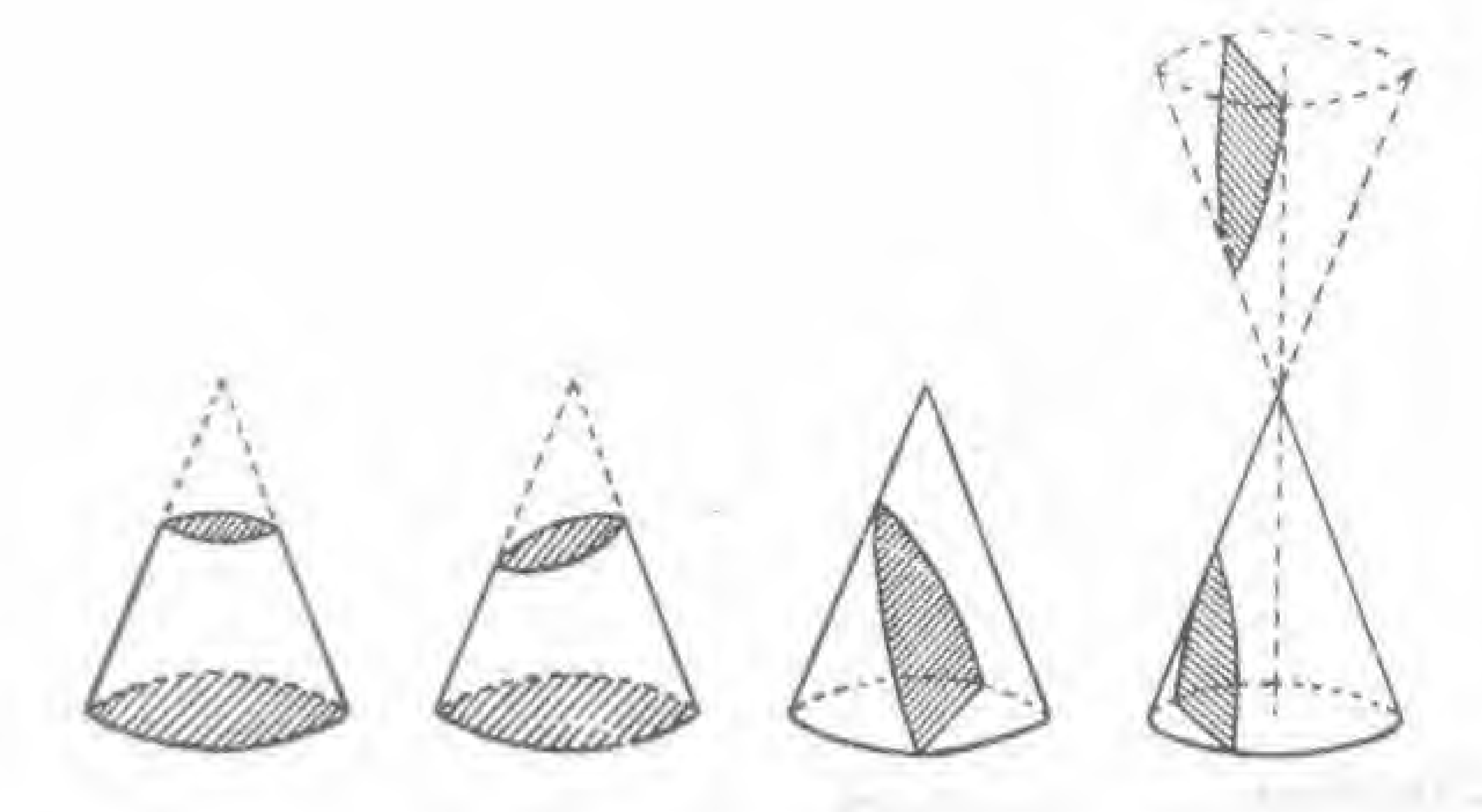
a) $\begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ R.: (2,8 ; 2,8) ; (—2,8 ; —2,8)

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ R.: (3,9 ; 3,2) ; (3,9 ; —3,2) (—3,9 ; 3,2) ; (—3,9 ; —3,2)

ECUACIÓN GENERAL DE LAS CÓNICAS

Geométricamente se pueden encontrar las curvas estudiadas: *circunferencia, elipse, hipérbola* y *parábola* como intersección de un plano y una superficie cónica para distintas posiciones del plano; por este motivo se llaman cónicas.

Si se corta una superficie cónica recta por un plano *paralelo a la base*, resulta la *circunferencia*; si es *oblicuo a la base*, resulta la *elipse*; si es *paralelo a la altura*, aparece una rama de la *hipérbola*, y si es *paralelo a la generatriz*, queda formada una *parábola*.



La ecuación general de segundo grado referida a los ejes x e y es del tipo

$$A x^2 + B y^2 + C x y + D x + E y + F = 0$$

Las ecuaciones de la *circunferencia, elipse, hipérbola* y *parábola* son tipos especiales de la de segundo grado; se llaman *ecuaciones reducidas*.

Para que la ecuación se reduzca a uno de los tipos ya estudiados se presentan dos casos fundamentales:

PRIMER CASO: *La ecuación carece del término rectangular* $(x \cdot y)$.

Trasladando los ejes en forma conveniente puede resultar:

1) $a x'^2 - b y'^2 + c = 0$ (ejes x', y')

En este caso se tiene una *hipérbola* de eje trasverso y'. (Los signos son + — +).

2) $a x'^2 + b y'^2 - c = 0$ (ejes x', y')

Se está en presencia de una *elipse*. (Los signos son + + —).

3) $a\,x'^2 + b\,y'^2 + c = 0$

En este caso se obtiene una *elipse imaginaria*. No hay ningún punto cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación. Como hay valores imaginarios que la satisfacen de ahí su nombre.
(Los signos son $+ + +$).

4) Cuando además falta el cuadrado de una de las variables, lo cual se simboliza

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

la ecuación representa una *parábola* de eje paralelo el eje *y*.

5) Cuando no existe el término rectangular y los coeficientes de los cuadrados son iguales se tiene una *circunferencia*:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0 \qquad (\text{siendo } A = B)$$

SEGUNDO CASO: *La ecuación contiene el término* $(x \cdot y)$.

Se puede anular el coeficiente de este término rectangular mediante un *giro* del sistema de coordenadas y de esta manera se obtiene una *ecuación reducida* respecto de dos ejes ortogonales nuevos.

INDICE

CALCULO INFINITESIMAL

INDICE

GEOMETRIA ANALITICA



Se acabó de imprimir
el día 21 de mayo de 1979
en los Talleres Gráficos Didot S. A.,
Icalma 2001, Buenos Aires.

Tirada de esta edición: 5.000 ejemplares.